Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Test suisse de solvabilité
Document technique

Office fédéral des assurances privées

Version du 25 avril 2007

1. Remarques liminaires

Le présent document constitue le volet technique du Test suisse de solvabilité (SST).

Les thèmes suivants n'y sont pas traités:
- l'évaluation des actifs,
- la modélisation des risques de marché dans le modèle standard.
- la modélisation des risques de risques biométriques de l'assurance vie dans le modèle standard.

Ces sujets feront l'objet d'une documentation distincte.

Ce document est une traduction de la version allemande du Juin 2006.

La structure de ce document technique est la suivante:
- Le chapitre 2 explique les fondements du SST et précise les notions de capital porteur de risque et de capital cible.
- Le chapitre 3 traite de l'évaluation des actifs et des passifs à la valeur de marché actuelle.
- Le chapitre 4 décrit le modèle standard pour les assureurs vie, maladie, dommages et accidents.
- Le chapitre 5 explicite les scénarios.
- Le chapitre 6 décrit la marge sur la valeur de marché (*market value margin*).
- Les chapitres 7 et 8 contiennent une bibliographie et des annexes techniques.

2. Fondements du SST

2.1 Introduction

> L'objectif du Test suisse de solvabilité ou SST (*Swiss Solvency Test*) est de déterminer, dans un premier temps, l'ampleur des risques encourus par une entreprise d'assurances et, dans un deuxième temps, si sa situation financière lui permet de supporter ces risques. Le risque encouru est mesuré à l'aide du capital cible et la capacité à assumer le risque à l'aide du capital porteur de risque.

La mise en parallèle du capital porteur de risque avec le capital cible permet à l'autorité de surveillance mais également aux entreprises d'assurances de connaître la situation financière de ces sociétés.

Le SST se fonde sur une série de principes qui sont exposés ci-après.

2.1.1 Principes du SST

Les actifs (placements) et les passifs (engagements) doivent tous être évalués à leur valeur de marché actuelle. La différence entre la valeur de marché actuelle des passifs, d'une part, et l'estimation non biaisée de la valeur actualisée (*discounted best estimate*) de l'espérance mathématique des flux de paiement afférents, d'autre part, est appelée marge sur la valeur de marché ou *market value margin* (MVM).

Les risques considérés dans le SST sont les risques de marché, de crédit et d'assurance.

Le capital disponible est déterminé par le capital porteur de risque (*CR*), qui est défini comme la différence entre la valeur de marché actuelle des actifs et l'estimation non biaisée de la valeur actualisée de l'espérance mathématique des passifs.

Le capital nécessaire est déterminé par le capital cible (*CC*), qui est défini comme la somme de la marge sur la valeur de marché et de l'*expected shortfall* de la différence entre la valeur actualisée du capital porteur de risque à un an et le capital porteur de risque actuel.

La marge sur la valeur de marché est approximée à l'aide des frais financiers, qui sont définis comme le montant total actualisé des frais financiers qui seront nécessaires dans le futur pour maintenir les capitaux réglementaires en cas de liquidation (*run-off*) du portefeuille composé des passifs et de la meilleure réplication possible des actifs.

Le capital porteur de risque doit être supérieur ou égal au capital cible.

Le SST s'appliquent aux entités juridiques ainsi qu'aux groupes et conglomérats domiciliés en Suisse.

Les entreprises d'assurances sont tenues d'évaluer divers scénarios. Premièrement, des scénarios prescrits par l'autorité de surveillance et deuxièmement, des scénarios spécifiques à l'entreprise. Si certains risques décrits dans un scénario ne sont pas pris en considération dans le modèle de risque, les résultats de l'évaluation du scénario doivent être intégrés dans le capital cible.

Les valeurs incertaines doivent être modélisées de façon stochastique.

Des modèles de risque propres aux entreprises ou «modèles internes» peuvent et doivent même dans certains cas être utilisés. Ils peuvent remplacer partiellement ou entièrement le modèle standard. Un modèle interne est obligatoire pour les risques qui ne sont pas évalués de manière adéquate dans le modèle standard.

Le modèle interne doit être intégré dans le processus de gestion des risques de l'entreprise.

La structure et les hypothèses du modèle interne doivent être divulgués de telle manière qu'un expert externe puisse former une opinion qualifiée sur le modèle et sur sa qualité.

Les entreprises d'assurances sont tenues d'établir un rapport SST. L'exigence principale de ce rapport est qu'un expert externe puisse comprendre les résultats du SST qui y sont présentés. Le rapport SST doit être signé par la direction de l'entreprise.

La direction de l'entreprise d'assurances répond du respect des principes du SST dans leur entreprise.

2.1.2 Rôle du modèle standard

Les entreprises d'assurances assujetties au SST doivent satisfaire aux principes énoncés. Un modèle standard SST pour les assureurs maladie, vie et non-vie a été développé pour le marché suisse en étroite collaboration avec les assureurs, les universités et d'autres milieux intéressés. Il comprend une structure type et des paramètres et pourra être utilisé en premier lieu par les assureurs dont la structure des actifs et des produits d'assurance n'est pas excessivement complexe. Les entreprises d'assurances dont les risques ne sont pas décrits de manière suffisamment précise dans le modèle standard devront le compléter ou le remplacer par leur propre modèle interne. Cela concerne principalement les groupes d'entreprises d'assurances, les assureurs qui ont des activités à l'étranger et les réassureurs.
Il est relativement aisé de compléter le modèle standard grâce à sa structure modulaire.

2.1.3 Déroulement des calculs dans le temps

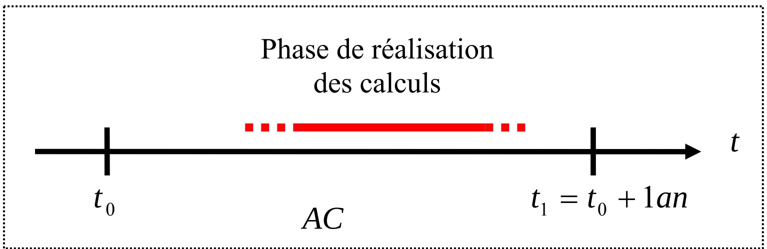
Le SST calcule le risque des portefeuilles d'actifs et de passifs à l'instant t_0. En règle générale t_0 est le 1er janvier de l'exercice où le SST est réalisé. Cet exercice est appelé «année en cours» (*AC*). Exceptionnellement, lorsque l'exposition au risque ou le capital disponible d'une entreprise d'assurances connaît une variation sensible en cours d'année, le SST doit être répété à ce moment-là.

Dans bien des cas, les portefeuilles d'actifs et de passifs sont identiques le 31 décembre et le 1er janvier suivant. On peut alors évaluer les risques et le capital disponible en se basant sur les positions en fin d'année. L'avantage est que ces chiffres sont vérifiés et attestés par une société de révision et qu'ils ne sont plus modifiés.

Mais si l'exposition au risque présente des différences considérables entre le 31 décembre et le 1er janvier suivant, par exemple suite à l'acquisition d'un portefeuille d'assurances, il faut obligatoirement prendre en considération la nouvelle exposition au 1er janvier. Il reste possible d'utiliser les valeurs du portefeuille au 31 décembre, mais il faut les corriger des modifications intervenues entre-temps.

Le risque est considéré comme la variation possible de la valeur du portefeuille sur un an. La fin de cette période est typiquement le 31 décembre qui est désigné par $t_1 = t_0 + 1an$.

On ne s'attend pas à ce que le SST soit réalisé le 1er janvier. Les calculs seront donc effectués en cours d'exercice. Mais l'esprit de ce test, qui consiste à analyser et comprendre les risques de l'année à venir ne présente d'intérêt que s'il est réalisé suffisamment tôt dans l'année.



2.2 Capital porteur de risque

Le capital porteur de risque (*CR*) est le capital qui peut être utilisé pour compenser les fluctuations des affaires. Les valeurs qui forment le capital porteur de risque ne doivent donc pas être liées d'une autre manière. Le capital porteur de risque est défini comme la différence entre la valeur de marché actuelle des actifs et l'estimation non biaisée de la valeur actualisée de l'espérance mathématique des passifs (*discounted best estimate of liabilities*).

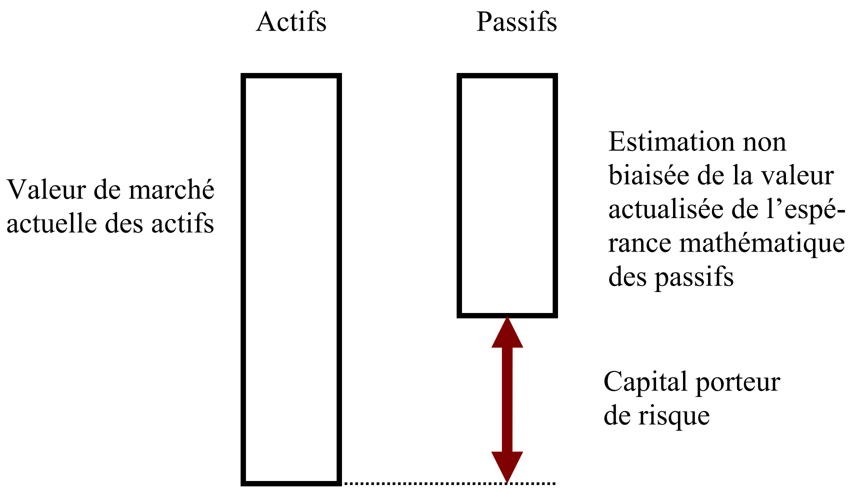


Figure: Définition du capital porteur de risque comme la différence entre la valeur des actifs et celle des passifs en t.

Nous reviendrons sur les notions de valeur de marché actuelle des actifs et d'estimation non biaisée de la valeur actualisée de l'espérance mathématique des passifs au chapitre 3.

La capital porteur de risque minimum nécessaire en t_0 est représenté par le capital cible (CC).

2.3 Risque

2.3.1 Typologie des risques

Les risques mesurés par le SST sont des risques de marché, d'assurance et de crédit. Pour l'instant, les risques d'exploitation (risque opérationnel) ne sont pas pris en considération pour déterminer le capital exigé, mais il n'est pas exclu qu'ils le soient ultérieurement.

Le risque de marché est le risque de fluctuation du capital porteur de risque sous l'effet de modifications de la situation conjoncturelle ou de facteurs économiques, désignés ici par facteurs de risque. Le modèle standard du SST comporte une centaine de facteurs de risque couvrant les secteurs des taux d'intérêt, des actions, de l'immobilier et des placements alternatifs.

Le risque d'assurance, ou risque technique, est le risque de fluctuation du capital porteur de risque sous l'effet de la réalisation aléatoire des risques assurés d'une part et des incertitudes propres à l'estimation des paramètres actuariels d'autre part.

Le risque de crédit est le risque de fluctuation du capital porteur de risque sous l'effet des défaillances et des modifications de la notation des contreparties. Le risque de crédit est notamment inclus dans les obligations, les prêts, les garanties, les prêts hypothécaires ainsi que les traités et avoirs de réassurance.

2.3.2 Horizon temporel: 1 an

Les risques mesurés se rapportent à des positions dont la durée de vie peut être très variable. Si certaines positions pour le marché sont parfois liquidées en l'espace de quelques jours, il existe aussi des actifs et des passifs qui lient l'assureur pendant plusieurs années, voire des décennies. Par convention, l'industrie des assurances mesure donc généralement les risques sur un an. Le SST se base sur cette convention.

2.3.3 Capital porteur de risque en fin d'année, définition du risque

La Figure 1 illustre le capital porteur de risque au début (t_0) et à la fin de l'année (t_1). Le capital porteur de risque en t_0 ($CR(0)$) se détermine à partir des actifs et des passifs, soit à l'aide du bilan établi à la valeur de marché actuelle. Il est donc connu. En revanche, le capital porteur de risque futur ($CR(1)$) est une inconnue, car l'évolution de l'environnement de l'entreprise est elle-même inconnue: il s'agit donc d'une valeur stochastique.

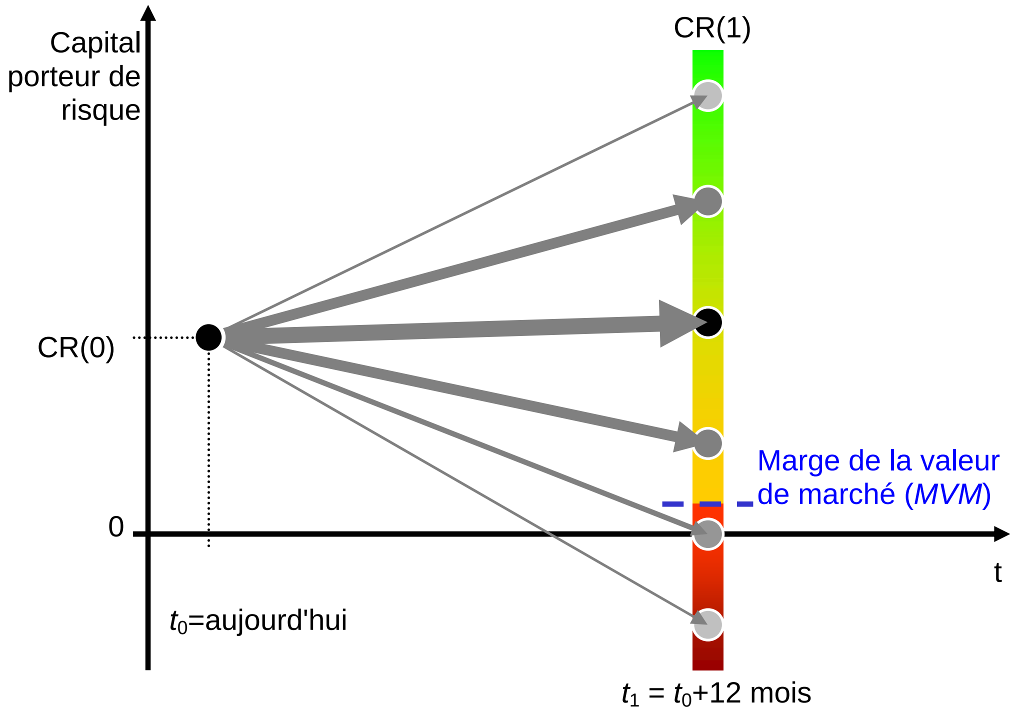


Figure 1: Capital porteur de risque en t_0 (connu) et en t_1 (inconnue stochastique).

Le montant du capital porteur de risque en fin d'année est indicatif de la valeur de marché des actifs par rapport à celle des passifs:

CR < 0	Actifs < Estimation non biaisée des passifs
0 < CR < MVM	Estimation non biaisée des passifs < Actifs < Valeur de marché des passifs
MVM < CR	Valeur de marché des passifs < Actifs

Si le capital porteur de risque en fin d'année est supérieur à la marge sur la valeur de marché, la valeur des actifs est supérieure à la valeur de marché des passifs.

La Figure 2 ci-dessous illustre plus en détail les différentes configurations du capital porteur de risque.

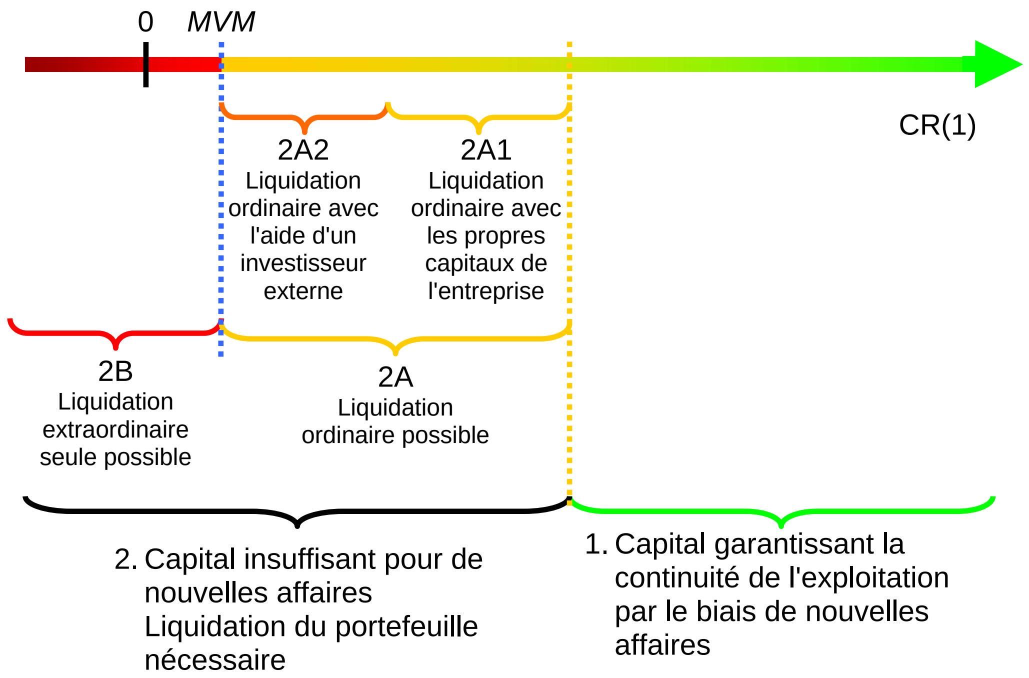


Figure 2: Différentes configurations du capital porteur de risque et leur influence sur la continuité de l'exploitation de l'entreprise d'assurances.

- Zone 1: le capital porteur de risque est supérieur au seuil au-delà duquel il est suffisant pour couvrir les risques en cours et pour souscrire de nouvelles affaires.
- Zone 2: le capital porteur de risque est inférieur au seuil évoqué pour la zone 1. Il est donc insuffisant pour souscrire de nouvelles affaires. Les contrats en cours seront honorés et les sinistres réglés, mais suivant que le capital porteur de risque est supérieur ou inférieur à la marge sur la valeur de marché, le risque inhérent au portefeuille en liquidation (*run-off risk*) doit être supporté par l'assuré ou alors il est couvert par le capital encore disponible ou même par un bailleur de capitaux externe.
    1. Zone 2A: le portefeuille est en liquidation mais l'assuré bénéficiera très probablement des prestations garanties. Dans le cas 2A1, le risque inhérent au portefeuille en liquidation est couvert par le capital porteur de risque encore disponible, tandis que dans le cas 2A2 il pourrait être cédé à un bailleur de capitaux externe. Cela est dû au fait que le capital porteur de risque est encore supérieur à la marge sur la valeur de marché, en d'autres termes que la valeur de marché des actifs est encore supérieure à la valeur de marché des passifs. La reprise de l'ensemble des actifs et des passifs pourrait donc revêtir un intérêt pour un investisseur ou un autre assureur.
    2. Zone 2B: le portefeuille en liquidation n'est pas suffisamment capitalisé ($CR < MVM$). Le risque inhérent au portefeuille en liquidation ne peut donc pas être couvert par le capital porteur de risque et aucun bailleur de fonds externe ne serait intéressé à l'assumer. Ce risque est donc supporté entièrement et exclusivement par les assurés.
       Tant que le capital porteur de risque reste positif, l'espérance mathématique des passifs est certes inférieure à la valeur des actifs, mais le risque que les règlements de sinistre excèdent cette valeur peut cependant être très élevé. Si le capital porteur de risque est négatif, les actifs ne couvrent même pas l'espérance mathématique des passifs.

2.4 Capital cible: mesure du risque

La zone 2B décrite précédemment recouvre les situations où l'entreprise d'assurances n'est très probablement pas en mesure d'honorer ses obligations envers ses assurés, ni actuellement ni dans le futur. Si l'on veut protéger les assurés, il faut éviter ces situations.

L'exigence du SST en matière de capital (capital cible) est donc formulée de manière telle que la probabilité de réalisation d'une situation du type 2B soit la plus faible possible.

La notion d'*expected shortfall* va être introduite dans la suite de cet exposé. L'*expected shortfall* sert à exprimer par une seule valeur les valeurs basses potentielles du capital porteur de risque en fin d'année. Cette valeur est définie comme la moyenne des capitaux porteurs de risque les plus bas possibles et peut donc être considérée comme représentative de ces valeurs basses. Le capital porteur de risque exigé aujourd'hui est mesuré de telle sorte que l'*expected shortfall* ne soit pas inférieur à la marge sur la valeur de marché.

2.4.1 Expected Shortfall

Avant de définir le capital cible, il convient d'introduire deux notions de mesure du risque: la *value at risk* (*VaR*) et l'*expected shortfall* (*ES*). *Expected shortfall* est aussi un synonyme de l'expression *tail value at risk* (*TailVaR*).

Le but de la mesure du risque est généralement de pouvoir représenter par un chiffre réel une incertitude ou une grandeur dont la valeur est inconnue, à l'aide d'un étalon de mesure adéquat, de manière à pouvoir exprimer l'exposition au risque de cette grandeur. Dans le SST, cet étalon de mesure du risque est l'*expected shortfall*.

Nous allons maintenant définir l'*expected shortfall*. Considérons d'abord une variable aléatoire X : les valeurs négatives de X représentent les «mauvaises» valeurs, celles que nous associons aux pertes, aux dommages, aux risques, etc., tandis que ses valeurs positives figurent les revenus et les bénéfices.

Dans un premier temps, nous introduisons la *value at risk* de X au niveau de sécurité $1-\alpha$ (par ex. 99%) et définissons cette $VaR_\alpha(X)$ de la manière suivante:

$$VaR_\alpha(X) \quad := \sup\left\{x : P(X \leq x) \leq \alpha\right\}$$

La *VaR* est donc le plus grand (autrement dit le *supremum*) de tous les x pour lesquels la probabilité que X soit inférieur ou égal à x est au maximum égale à α .
Remarque: si la fonction de distribution est continue, $VaR_{1\%}(X)$ est égal au x pour lequel X est inférieur à x dans 1% des cas et supérieur à x dans 99% des cas.

Dans un deuxième temps, nous définissons l'*expected shortfall* de la valeur aléatoire X au niveau de sécurité $1-\alpha$ comme étant l'espérance mathématique conditionnelle E de X , pour X plus petit ou égal à la *VaR* au niveau de sécurité $1-\alpha$:

$$ES_\alpha(X) := E\left[X \,\middle|\, X \leq VaR_\alpha(X)\right] \qquad (1)$$

Il arrive qu'un événement soit caractérisé par une probabilité de 1% par an. On parle d'événement «centennal» (par ex. crue ou tempête centennale). Cette qualification est possible lorsque la caractérisation du risque ne varie pas sur une durée de 100 ans, comme c'est le cas pour le nombre annuel de chutes d'astéroïdes, par exemple. Il n'en va pas de même pour d'autres risques comme les traumatismes cervicaux dans les accidents de la route ou les dommages dus aux avalanches, qui sont liés à l'urbanisation croissante.

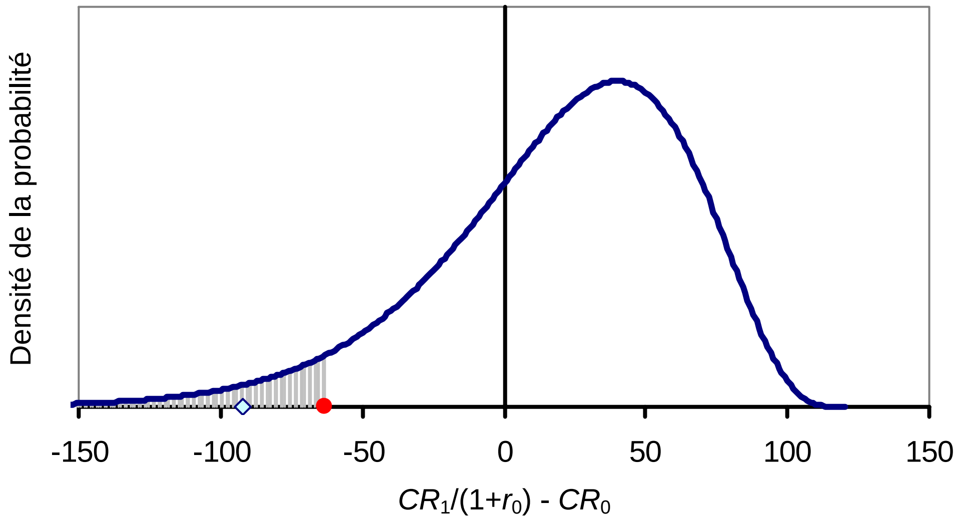


Figure 3: *Value at risk* (VaR, point rouge) et *expected shortfall* (ES, carré bleu) à l'exemple d'une distribution schématique de la variation du capital porteur de risque (*CR*); le quantile n'a pas été fixé à 1% mais à 5% pour les besoins de l'illustration.

Au même niveau de sécurité, l'*expected shortfall* est un étalon de mesure du risque plus prudent que la *VaR*. Dans la réalité, une distribution des dommages présentera certainement quelques pertes extrêmement élevées mais dont la probabilité est très faible. Pour ces cas, l'*expected shortfall* est plus approprié que la *VaR* car il intègre aussi l'ampleur de ces pertes extrêmes.

Contrairement à la *VaR*, l'*expected shortfall* quantifie le coût moyen de l'un des $(100 \cdot \alpha)$% pires événements. En pratique, l'on constate que l'*expected shortfall* est plus stable que la *VaR*. De plus, pour des variables aléatoires constantes il présente aussi d'autres propriétés (mathématiques) intéressantes comme la cohérence.
A ce sujet, voir:

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D., 1999. Coherent measures of risk. Math. Fin. 9, 3, 203-228
- Acerbi, C., Tasche, D. 2000, On the coherence of expected shortfall, Journal of Banking and Finance 26(7), 1487-1503

Certains auteurs (Swiss Re par exemple) ne définissent pas la *VaR* et l'*expected shortfall* de la même manière que nous, mais comme l'écart entre ces valeurs et l'espérance mathématique d'une distribution. La définition donnée n'est finalement qu'une question de convention et de nécessité, car il faut bien définir un étalon de mesure du risque. Cette définition dépend notamment de la manière dont on formule l'invariance par translation. Le SST recourt de manière constante à la définition donnée ci-dessus. Nous préférons cette formulation car elle chiffre la valeur imputable aux situations exceptionnelles et ne se contente pas de quantifier l'écart entre la valeur imputable aux situations exceptionnelles et l'espérance mathématique.

2.4.2 Capital cible

Nous avons vu précédemment que les situations correspondant à la zone 2B présentée au paragraphe 2.3.3 ne sont pas souhaitées. Le capital cible sert à déterminer le montant du capital porteur de risque en t_0 afin qu'avec la plus grande probabilité possible il soit supérieur ou égal à la marge sur la valeur de marché en t_1. On calcule le capital cible à l'aide de l'équation suivante, en recourant à l'*expected shortfall*:

$$ES_\alpha[CR(t_1)|CR(t_0)=CC]=MVM \tag{2a}$$

Il s'agit d'une équation implicite du capital cible selon laquelle lorsque le capital porteur de risque actuel $CR(t_0)$ est suffisamment élevé au sens du SST (à savoir égal au capital cible), on a la certitude que l'*expected shortfall* du capital porteur de risque en fin d'année sera égal à la marge sur la valeur de marché. Vu la structure de l'*expected shortfall*, la probabilité que $CR(t_1)$ chute en dessous de la marge sur la valeur de marché est alors faible.

On peut remplacer l'équation ci-dessus par la définition plus simple, mais largement équivalente, du capital cible:

$$CC=-ES_\alpha\left(\frac{CR(t_1)}{1+r_1^{(0)}}-CR(t_0)\right)+\frac{MVM}{1+r_1^{(0)}} \tag{2b}$$

où $r_1^{(0)}$ représente le taux d'intérêt actuel sans risque, à un an.
Le capital cible se compose donc de l'*expected shortfall* de la variation du capital porteur de risque pour le risque à un an et de la marge sur la valeur de marché (pour son calcul voir au chapitre 6).

Pour que toutes les créances soient couvertes en fin d'année, il faut que le capital porteur de risque disponible en fin d'année soit supérieur à la marge sur la valeur de marché de la moyenne des cas α les plus graves. Ici, la marge sur la valeur de marché est le prix du futur capital risque à maintenir pour indemniser un autre assureur ou un investisseur qui serait amené à reprendre ce portefeuille. La marge sur la valeur de marché couvre donc essentiellement les frais encourus par le repreneur pour la mise à disposition du capital cible futur, lors de l'acquisition du portefeuille. Elle peut de ce fait être considérée comme une prime de risque pour la liquidation des passifs.

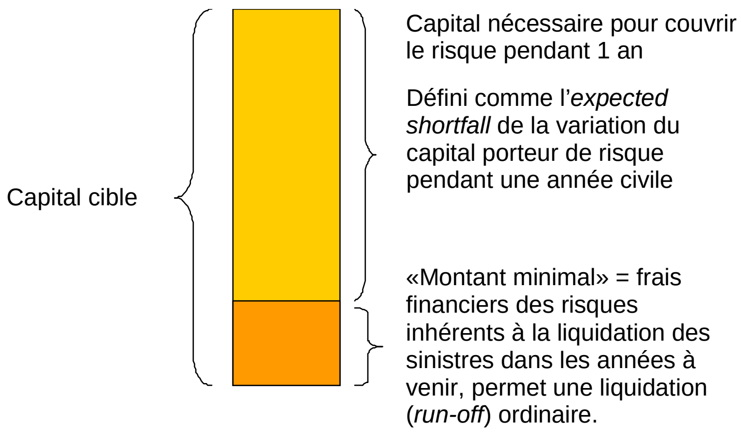


Figure 4: Capital cible défini comme la somme du capital porteur de risque sur 1 an et du capital minimal.

Plus concrètement, pour un niveau de sécurité de 99%, le capital cible est la somme de l'espérance mathématique des moins-values les plus grandes possibles – quantifiées à 1% – et de la marge sur la valeur de marché pour le capital porteur de risque évoquée ci-dessus. Si, durant l'année, l'une des 1% plus grandes moins-values (improbables) du capital porteur de risque survient, en moyenne le capital porteur de risque est encore suffisant pour une reprise du futur capital porteur de risque. La Figure 5 donne des exemples chiffrés reproduisant l'ampleur du risque sur un an et la marge sur la valeur de marché.

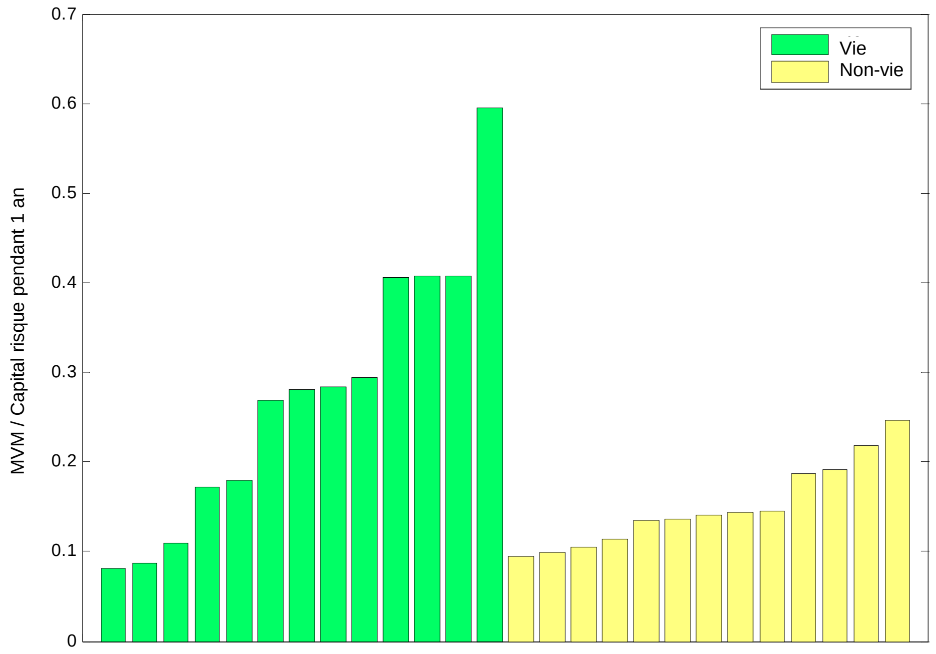


Figure 5: Rapport entre la marge sur la valeur de marché et le capital risque sur un an pour divers assureurs vie et non-vie; valeurs tirées du SST Pilote 2005

2.5 Risques dans les groupes d'assurances et les conglomérats

Nous renvoyons pour l'instant aux documents accessibles sur Internet et portant sur les risques dans les groupes d'assurances.[A]

[A] http://www.bpv.admin.ch/themen/00506

3. Évaluation

3.1 Évaluation des actifs

Voir le document «Bestimmung der marktnahen Bilanzwerte zur Ermittlung des risikotragenden Kapitals im SST» (http://www.bpv.admin.ch/themen/00506/00552/index.html?lang=de)

3.2 Évaluation des passifs des assureurs vie

La valeur des passifs actuariels est définie comme l'espérance mathématique (avec une mesure de probabilité neutre au risque) des règlements futurs garantis contractuellement, actualisés avec la courbe des taux d'intérêt sans risque. Dans ce contexte, une attention toute particulière doit être portée au principe de l'estimation non biaisée (*best estimate*): l'évaluation ne comporte aucune réserve implicite ou explicite de sécurité, de fluctuation ou autres. Elle se base exclusivement sur l'espérance mathématique des passifs.

La courbe des taux sans risque pour les opérations en CHF est donnée par les emprunts de la Confédération. L'autorité de surveillance fournira des courbes sans risque comparables pour les opérations en EUR, USD et GBP.

3.2.1 Considérations générales sur la modélisation des passifs dans l'assurance vie

Il faut modéliser les flux de trésorerie suivants, puis les actualiser avec la courbe des taux sans risque:

Entrées:
- Primes
- Autres recettes

Sorties:
+ Prestations en cas de décès
+ Prestations en cas de vie
+ Prestations de rentes
+ Prestations de rachat
+ Autres prestations (en liquide)
+ Commissions
+ Frais administratifs (y compris frais de gestion des placements)

Les points suivants sont à prendre en considération:

- **Risques biométriques et financiers.** On suppose que le risque financier est indépendant du risque de mortalité. Cette indépendance vaut aussi en première approximation entre le risque financier et le risque d'invalidité. Il n'en va pas de même avec le taux de sortie, qui est corrélé avec la courbe des taux d'intérêt.
- **Courbe des taux.** Les taux d'intérêt sans risque sont déterminés par l'OFAP et mis à la disposition des entreprises.
- **Bases de 2^e ordre.** Pour les risques biométriques tels que la mortalité et les fréquences d'invalidité et de réactivation, il faut se fonder sur les bases de 2^e ordre (hypothèses d'estimations non biaisées ou *best estimate*).
- **Effectif d'assurés.** On ne considère que le portefeuille d'assurés réel lors de l'évaluation en t_0. Les futurs nouveaux contrats en sont exclus. Des hypothèses particulières ont été retenues pour les contrats LPP (cf. ci-dessous).
- **Segmentation.** L'évaluation des passifs à la valeur de marché actuelle doit, si possible, se faire au niveau de la police ou de l'assuré. On peut aussi procéder par consolidation de portefeuille, pour autant que cela soit plausible.
- **Périodicité.** Les dates de référence devraient correspondre aux débuts d'année. Une périodicité plus rapprochée (semestrielle, trimestrielle) est également admissible.

- **Horizon.** La projection doit s'étendre du moment de l'évaluation t_0 jusqu'à la date d'expiration complète de toutes les polices.
- **Réassurance.** Les prestations en réassurance doivent être intégrées dans les flux de trésorerie.
- **Flux de paiement en cours d'exercice.** Les flux de paiement intervenant en cours d'exercice (suite, par exemple, au rachat d'une police ou à la réalisation du risque assuré) doivent être actualisés à la date d'évaluation principale (début d'année) la plus proche.
- **Excédents.** Les excédents ne doivent être intégrés que s'il est impossible d'en disposer (par ex. excédents garantis).
- **Impôts, dividendes.** Les impôts et dividendes ne sont pas pris en considération. On n'inclut que les flux de trésorerie dont le versement est «sûr» au-delà de l'horizon temps fixé à un an.
- **Réserves mathématiques, revenus des placements.** Les réserves mathématiques ainsi que les gains et pertes sur placements non réalisés ne sont pas intégrés dans les flux de trésorerie puisqu'il n'y a pas d'entrée ou de sortie d'argent.
- **Coûts.** La projection des coûts doit se faire conformément au principe de continuité de l'exploitation (*going concern*). Il faut s'assurer que tous les coûts sont pris en considération (également les frais généraux ou *overhead*).
- **Monnaies étrangères.** Les flux de trésorerie provenant de polices libellées en monnaies étrangères doivent être actualisés avec la courbe des taux sans risque de la monnaie en question.
- **Autres recettes.** Les autres recettes comprennent entre autres les rétrocommissions des assurances vie liées à des fonds de placement.

Pour plus de détails, voir le document «Marktnahe Bewertung von Leben-Verpflichtungen» du 15 mars 2004.

3.2.2 LPP: remarques concernant les modèles de prévoyance professionnelle

Le texte ci-dessous est une version augmentée du document «Schweizer Solvenztest, Lebensversicherung, Hinweise zur Modellierung der beruflichen Vorsorge, Version 0j», qu'il remplace.

3.2.2.1 Portée du modèle

Il s'agit ici de modéliser le segment des assurances vie couvert par la nouvelle comptabilité séparée qui est exigée pour les assurances de prévoyance professionnelle (art. 139 OS). Si d'autres risques sont induits par la politique d'entreprise, les garanties correspondantes doivent également être incluses dans l'évaluation (par ex. l'intention de compenser le découvert d'une fondation collective ou de la propre institution de prévoyance).

3.2.2.2 Genres de modèles

Il faut modéliser les flux de trésorerie attendus correspondant au développement futur des contrats. Les options contractuelles doivent aussi être prises en considération. A ce sujet, nous renvoyons le lecteur au document «Richtlinie zur marktnahen Bewertung und Modellierung von Optionen und Garantien im Rahmen des Schweizer Solvenztestes»[B].
L'OFAP ne prescrit pas de modèle particulier, sauf pour la sensibilité aux taux d'intérêt de l'avoir de vieillesse obligatoire (ch. 3.2.2.8). La modélisation des autres passifs peut en principe reposer soit sur des modèles «déterministes» où une évolution de l'effectif d'assurés se réalise explicitement soit sur des modèles «stochastiques» qui se basent par exemple sur des simulations Monte-Carlo. L'OFAP n'impose pas explicitement le degré de précision des modèles. Des simplifications plausibles sont possibles et même souhaitées, pour autant qu'il soit démontré que la sensibilité au risque ne s'en trouve pas modifiée dans son essence.

[B] Ce document a été mis au point par un groupe de travail de l'Association suisse des Actuaires (ASA), avec le concours de l'OFAP. La version la plus récente peut être téléchargée sur Internet à l'adresse: http://www.actuaries.ch/de/forum/documents/Richtlinie_marktnahe_Bewertung_Garantien_Optionen-V1-0Juli2006_who.pdf.

3.2.2.3 Développement futur des contrats

Les hypothèses qui sous-tendent le développement futur des contrats doivent être explicitées et dûment motivées. Il faut modéliser les flux de trésorerie correspondant à une évolution réaliste, compte tenu de la politique en cours de l'entreprise. Tous les sous-processus du modèle doivent être cohérents avec l'évolution qui a été postulée. Les risques et les coûts ainsi que la durée pendant laquelle ils sont pris en considération doivent aussi être conformes à cette évolution. Il en va de même pour les pertes relatives au taux de conversion en rente, qui évoluent en fonction du développement futur des contrats.
Bien entendu, il est possible de faire dépendre cette évolution de paramètres économiques.
Lorsque le développement suit un cours normal, un scénario séparé prévoyant une forte diminution serait souhaitable (par ex. extinction sur trois ans).

3.2.2.4 Séparation des composantes obligatoires et surobligatoires

Les composantes obligatoires et surobligatoires des passifs doivent être modélisées séparément pour la rémunération de l'avoir de vieillesse et la conversion des rentes.

3.2.2.5 Limitation de la durée des risques dans le portefeuille d'assurés actifs

L'OFAP permet de limiter à 10 ans la durée globale pendant laquelle les risques liés à l'évolution du portefeuille d'assurés actifs sont pris en considération, même si en réalité ce portefeuille a une durée plus longue. Cette restriction tient aussi compte du fait qu'à moyen terme, l'assureur peut améliorer sa gestion actif-passif ou se retirer de ce type d'affaires, et qu'à plus long terme la modélisation des risques est affectée par une incertitude croissante.

3.2.2.6 Taux minimum LPP

Tant qu'aucune règle technique ne sera imposée politiquement pour déterminer le taux minimum LPP, il incombe à l'autorité de surveillance de la fixer et de communiquer les taux d'intérêt qui en résultent.

Règle de l'OFAP pour déterminer le taux minimum LPP dans le SST:
Le taux minimum LPP s'élève à 70% de la moyenne mobile sur 7 ans du taux au comptant servi sur les emprunts de la Confédération d'une durée de 7 ans (règle 70/7/7). En dérogation à cette règle, la première année il faut appliquer le taux minimum effectif et la deuxième année la moyenne entre le taux minimum et le 70/7/7.

Sur cette base, l'OFAP a fixé les valeurs suivantes pour le SST Pilote 2006:

(0) Année	(1) Moyenne annuelle des taux au comptant des emprunts de la Confédération d'une durée de 7 ans (en %)	(2) 70% de (1)	(3) 70 / 7 / 7	(4) Taux minimum LPP dans le SST (en %)	(5) 120 / 7 / 7
1999	2,630	1,841			
2000	3,710	2,597			
2001	3,162	2,213			
2002	2,877	2,014			
2003	2,159	1,511			
2004	2,323	1,626			
2005	1,853	1,297	1,871		
2006	1,988	1,392	1,807	2,500	
2007	2,036	1,425	1,640	2,070	2,811
2008	2,076	1,453	1,531	1,531	2,625
2009	2,128	1,490	1,456	1,456	
2010	2,194	1,536	1,460	1,460	
2011	2,269	1,588	1,454	1,454	
2012	2,348	1,643	1,504	1,504	
2013	2,427	1,699	1,548	1,548	
2014	2,505	1,753	1,595	1,595	
2015	2,578	1,805	1,645	1,645	

Les taux d'intérêt reportés de 1999 à 2005 sont des moyennes des taux journaliers. C'est pour cette raison que les données de la colonne (1) divergent des taux au comptant au 1er janvier qui figurent dans la colonne (1) du tableau expédié en mars «*70-7-7-Zinssaetze für das Repliportfolio im SST_16-03-06.xls*». Les taux d'intérêt futurs (à partir de 2006) sont les taux à terme qui forment la courbe des taux dans le *SST Template* (feuille de tableur Excel).

3.2.2.7 Scénarios du taux minimum LPP

Dans la prévoyance professionnelle, il faut modéliser un scénario du taux minimum LPP qui simule un écart soudain de la règle de détermination du taux minimum. Cet écart ne s'applique que pour la deuxième et la troisième année et correspond à la valeur 120/7/7:

2007: 2,811%
2008: 2,625%.

On modélise un effet unique, sans autre facteur d'influence. L'écart doit se manifester la deuxième année et déployer des effets durant deux ans, puisque la première valeur est déterminée par le taux minimum effectif et que le Conseil fédéral fixe toujours ce taux pour les deux années suivantes. La règle 70/7/7 est de nouveau appliquée les années d'après.
Si l'on recourt au portefeuille de réplication pour modéliser l'avoir de vieillesse obligatoire (ch. 3.2.2.8), la deuxième et la troisième année il faut augmenter les taux d'intérêt de toutes les tranches utilisées à 120% (au lieu de 70%).

3.2.2.8 Modélisation de l'avoir de vieillesse obligatoire

L'avoir de vieillesse doit faire l'objet de deux modélisations distinctes pour les parties obligatoire et surobligatoire. Tous les assureurs doivent fonder leur modélisation de l'avoir de vieillesse *obligatoire* sur le *portefeuille de réplication* de l'OFAP décrit ci-dessous, qui est intégré dans le *SST Template*. Ils peuvent toutefois procéder à d'autres modélisations en plus. Si l'assureur procède à une *modélisation des flux de trésorerie* de l'avoir de vieillesse qui satisfait aux exigences décrites ci-dessous, son équivalence pourra être reconnue par l'OFAP. Un SST dans lequel l'avoir de vieillesse obligatoire est modélisé à l'aide du portefeuille de réplication devra cependant être effectué dans tous les cas.

Lors de fortes fluctuations de l'effectif, un autre modèle devra être calculé en plus du portefeuille de réplication.

La conversion en rente sera traitée séparément au paragraphe 3.2.2.10.

Caractéristiques du portefeuille de réplication:

- Le portefeuille de réplication comporte sept tranches virtuelles d'emprunts de la Confédération à 7 ans émis depuis 7 ans jusqu'à fin 2005.
- Le modèle de réplication ne comporte aucun autre degré de liberté que l'avoir de vieillesse (obligatoire ou surobligatoire) à fin 2005. Le calcul s'effectue donc exactement de la même manière pour tous les assureurs vie actifs dans les assurances de prévoyance professionnelle.
- Chaque tranche présente le même nominal qui correspond à un septième de l'avoir de vieillesse à fin 2005.
- Le taux d'intérêt minimum est réalisé avec 70% des revenus des coupons.

Caractéristiques du modèle des flux de trésorerie:

- Les assurés actifs sont traités comme un portefeuille de rentes viagères différées.
- Des consolidations de portefeuille sont possibles à des fins de simplification, si elles sont appropriées.
- La rémunération de l'avoir de vieillesse suit l'évolution du taux minimum LPP (ch. 3.2.2.6).
- On peut postuler le maintien ou le vieillissement de la structure d'âge, mais en aucun cas son rajeunissement.
- Le total peut se maintenir ou être réduit, mais pas augmenté.
- L'avoir de vieillesse est exigible lorsque l'assuré quitte l'entreprise. Une déduction au titre du risque d'intérêt est admise en cas de sortie durant les cinq premières années du contrat.
- Le portefeuille résiduel d'assurés actifs après 10 ans est pris en considération à la valeur nominale de l'avoir de vieillesse.

La modélisation des intérêts à servir sur l'avoir de vieillesse obligatoire envers les institutions collectives autonomes, qui ne sont pas astreintes au taux d'intérêt minimum LPP, peut reposer sur un taux différent, plus en phase avec la politique d'affaires. Une telle utilisation doit être explicitée et dûment motivée.

3.2.2.9 Modélisation de l'avoir de vieillesse surobligatoire

La part d'épargne surobligatoire doit être modélisée en conformité avec la politique d'affaires. Lorsque l'objectif n'est pas le taux d'intérêt minimum LPP, la modélisation peut reposer sur un taux différent, plus en phase avec la politique d'affaires. Une telle utilisation doit être explicitée et dûment motivée. L'épargne surobligatoire peut être modélisée à l'aide du portefeuille de réplication idoine inclus dans le *SST Template* ou d'une autre méthode. Elle peut aussi être calculée au moyen d'une marge limitée entre la performance et la rémunération, *mais sur 10 ans au plus*. Dans ce cas aussi, la méthode utilisée doit être explicitée et dûment motivée.

3.2.2.10 Conversion en rente et option de versement du capital

La conversion en rente doit être modélisée séparément pour les parties obligatoire et surobligatoire. Le capital de vieillesse pouvant être converti en rente se détermine de la manière suivante: la projection des avoirs de vieillesse doit d'abord être conforme à l'évolution de l'effectif sur 10 ans; la part obligatoire est rémunéré au taux minimum LPP (également les passifs envers les institutions collectives autonomes) tandis que la part surobligatoire est rémunérée sur la base des taux d'intérêt retenus pour cette partie (ch. 3.2.2.9). Une partie de l'avoir de vieillesse est libérée pour être convertie en rente ou pour un versement de capital, en fonction de l'évolution de l'effectif.
La quote-part affectée au versement du capital doit être explicitée et la relation avec l'évolution des taux d'intérêt être prise en considération.
Les nouvelles conversions en rentes ne doivent être prises en considération que pendant 10 ans.

Le taux de conversion légal doit être appliqué à la partie obligatoire de l'avoir de vieillesse destinée à être convertie en rente de vieillesse. Suite à la première révision de la LPP, le taux de conversion en rente passera de 7,2% actuellement à 6,8% en 2014. Pour les années suivantes, la conversion se fera encore au taux de 6,8%.
Dans le segment surobligatoire, il est possible d'opérer une transition linéaire sur 5 ans de l'actuel taux de conversion autorisé vers un taux de conversion de second ordre.
Le montant des rentes de vieillesse peut être déterminé conformément au schéma figurant dans le *SST Template* (feuille L_BV_Renten). (Une erreur s'était glissée dans la première version, qui ne comportait que neuf années. Ce point a été corrigé et comporte maintenant 10 ans.)
L'option de versement du capital doit être évaluée conformément au document «Richtlinie zur marktnahen Bewertung und Modellierung von Optionen und Garantien im Rahmen des Schweizer Solvenztestes».

3.2.2.11 Rentes en cours

Les rentes en cours naissent en fonction de la structure des risques et de l'évolution de l'effectif du portefeuille. Leur apparition doit être prise en compte sur une durée de 10 ans au moins. Les rentes, y compris les rentes futures, sont actualisées à leur valeur proche du marché à la date du SST (tables de mortalité de 2e ordre, actualisation avec la courbe des taux). Dans le SST, les rentes sont donc exposées à un risque de taux et à un risque biométrique. S'agissant des rentes d'invalidité en cours, la réactivation peut être incluse globalement. La tendance de la mortalité doit être intégrée à l'aide d'une méthode reconnue sur le plan actuariel (table générationnelle, par ex. avec le modèle de Nolfi $q_{x,t} = q_{x,t_0} \cdot \exp(-\lambda_x \cdot (t - t_0))$ et un paramètre λ_x défini au moyen d'un processus d'estimation de tendance agréé).

3.2.2.12 Processus de risque pour les assurés actifs

Le processus de risque pour les assurés actifs peut être modélisé de manière simplifiée à l'aide d'une marge entre les primes et les sinistres. Nous postulons que l'utilisation d'une telle marge est possible puisque la tarification est annuelle, même si dans la réalité l'adaptation du tarif est décalée dans le temps et soumise à des restrictions légales. Cette marge doit se baser sur la marge effective lors du SST et peut inclure un certain potentiel d'amélioration. Elle peut toutefois représenter 20% de la prime de risque au maximum et peut être utilisée pendant *10 ans au plus*. Cette marge doit bien entendu être prise en considération lors de la détermination du pourcentage minimum (*legal quote*).
Les sinistres sont fonction de la structure de risque du portefeuille. Les primes peuvent ensuite être dérivées des sinistres à l'aide de la marge.
Bien entendu, d'autres modèles plus précis peuvent être appliqués.

3.2.2.13 Processus de frais

Le processus de frais peut aussi être modélisé de manière globale à l'aide d'une marge. Celle qui est utilisée doit cependant se baser sur la marge effective lors du SST. Elle peut s'améliorer ou se détériorer mais peut s'élever à 20% de la prime de frais au maximum et peut être utilisée *pendant 10 ans au plus*. Naturellement, cette marge doit aussi être prise en considération lors de la détermination du pourcentage minimum. Lors d'une réduction de portefeuille, il faut tabler sur une augmentation des taux de frais. L'évolution des frais doit dans tous les cas être explicitée et dûment motivée.

3.2.2.14 Résiliations de contrat

Les résiliations de contrat ainsi que les pertes d'intérêts et le manque à gagner sur les marges qui en découlent doivent être pris en considération proportionnellement à l'évolution de l'effectif. Il faut également tenir compte de la pratique découlant de l'art. 53e LPP (transfert ou conservation des rentes en cours). L'option de rachat doit donc être évaluée et déduite du capital porteur de risque.
Il faut définir la sensibilité au taux d'intérêt du comportement en matière de résiliation et la prendre en considération conformément au document «Richtlinie zur marktnahen Bewertung und Modellierung von Optionen und Garantien im Rahmen des Schweizer Solvenztestes».

Les résiliations de contrat ne doivent être prises en considération que sur 10 ans.

3.2.2.15 Indexation et fonds de renchérissement

Le modèle standard ne tient pas compte des risques de renchérissement puisque les primes de renchérissement peuvent être adaptées annuellement. En tout état de cause, les ressources du fonds de renchérissement ne peuvent être affectées qu'à la compensation du renchérissement ou à un transfert dans le fonds d'excédents. Le fonds de renchérissement évolue proportionnellement au portefeuille. En l'occurrence, la marge d'intérêts actuelle entre la rémunération selon le tarif et les revenus effectifs du capital peut être maintenue. L'OFAP limite la marge à 1% au maximum. Le calcul de la marge peut porter sur *10 ans au plus*. Nous postulons à des fins de simplification que les primes de renchérissement correspondent à la somme des frais et des prestations.

3.2.2.16 Pourcentage minimum

Les effets des règles légales concernant le pourcentage minimum (*legal quote*) doivent être pris en considération, dans la mesure du possible. A cet égard, on rappellera que la définition du pourcentage minimum repose sur des valeurs statutaires. Dans le compte d'exploitation, les valeurs statutaires sont estimées afin que les effets du pourcentage minimum puissent être pris en considération.
Cela ne concerne bien entendu que les contrats soumis aux règles du pourcentage minimum.

3.2.2.17 Présentation

La présentation du modèle et des résultats doit contenir les hypothèses retenues, l'effectif de départ, les paramètres et les données essentielles de l'effectif sous forme de séries temporelles. Sont visés, notamment, les avoirs de vieillesse obligatoires et surobligatoires, les taux d'intérêt, la réserve mathématique des rentes en cours, les pertes sur taux de conversion, les primes de risque et les frais.

3.3 Évaluation des passifs des assureurs non-vie

La valeur des réserves et des passifs non porteurs de risque se compose:

- de l'estimation non biaisée de la valeur actuelle de l'espérance mathématique des futurs règlements de sinistres dont la date de survenance est antérieure à la date de calcul du SST; cette valeur inclut les réserves pour sinistres survenus mais non encore déclarés (IBNR);
- des réserves pour les frais futurs en rapport avec les sinistres évoqués au point précédent (ULAE);
- du report de primes, c'est-à-dire des primes encaissées qui ne sont pas encore acquises (UPR);
- de l'estimation non biaisée de la valeur actualisée des autres réserves et passifs non porteurs de risque, soit:
    1. les obligations émises,
    2. les versements de dividendes de l'exercice précédent déjà planifiés,
    3. les réserves pour d'éventuelles participations contractuelles des assurés aux excédents et aux bénéfices,
    4. les propres actions (qui apparaissent des deux côtés du bilan),
    5. les réserves pour impôts,
    6. les réserves constituées au titre du propre régime de retraites,
    7. les autres réserves et passifs non porteurs de risque.

> L'estimation non biaisées de la valeur actualisée des réserves pour sinistres est une estimation de la valeur actuelle de l'espérance mathématique de l'ensemble des règlements futurs dont la date de sinistre est antérieure à la date de référence. L'estimation doit être non biaisée et tenir compte de toutes les informations disponibles à la date de référence.

L'estimation non biaisées de la valeur actualisée des réserves s'obtient en déterminant l'estimation non biaisée des règlements futurs par branche d'assurance, actualisée à la date de référence (par ex. t_0). A cette fin, on utilise les taux d'actualisation sans risque $v_j^{(0)}$. Les règlements futurs sont déterminés au moyen du modèle de règlement des réserves non actualisées et estimées sans biais.

L'estimation non biaisées de la valeur actualisée de la réserve en t_0 est ainsi

$$\sum_{k\geq 1} v_k^{(0)} \beta_{k-1} \cdot R_{AP}^{(0)} = \sum_{k\geq 1} d_{AP}^{(0)} \cdot R_{AP}^{(0)} \tag{3}$$

où $R_{AP}^{(0)}$ représente les réserves pour sinistres non actualisées, nécessaires en t_0 pour les sinistres considérés (sinistres survenus les années précédentes). L'Association Suisse des Actuaires (ASA) établira des directives à ce sujet. Les coefficients $(\beta_k)_{k\geq 0}$ désignent le modèle de règlement par branche et peuvent être définis individuellement par chaque entreprise. Le SST propose aussi un modèle de règlement standardisé pour la plupart des branches. Il s'agit du modèle $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ indépendant de l'année du sinistre, qui est dérivé de la structure des grands portefeuilles du marché suisse de l'assurance. Pour calculer les $(\beta_k)_{k\geq 0}$ à partir de ces modèles de règlement, ces derniers doivent d'abord être rapportés aux réserves à la fin de l'exercice précédent (*AC*-1) par année du sinistre, conformément aux années déjà liquidées. Les $(\beta_k)_{k\geq 0}$ peuvent ensuite être calculés à partir de l'évolution de la réserve générale pour toutes les années de sinistre.
Les valeurs standard du modèle de règlement $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ se trouvent dans le *SST Template*.

3.3.1 Cas particulier des rentes LAA

Les réserves de la branche LAA (assurance-accidents obligatoire pour les personnes exerçant une activité professionnelle) sont subdivisées en

- réserves pour les sinistres qui ne donnent pas (encore) lieu à une rente;
- réserves pour les sinistres qui donnent lieu au versement d'une rente.

Nous traitons ici de la seconde catégorie, les réserves pour rentes.

Les rentes LAA se composent d'une rente de base et d'une allocation de renchérissement (AR), laquelle est définie par analogie à celle en vigueur dans le régime de l'AVS. L'allocation de renchérissement est financée par les excédents d'intérêts $\phi_{10/10} - i_{LAA}$, où i_{LAA} est le taux d'intérêt technique de 3,25% et $\phi_{10/10}$ la moyenne des taux au comptant à 10 ans des dix dernières années. $\phi_{10/10}$ est calculé annuellement par l'Office fédéral de la santé publique (OFSP) sur la base des taux d'intérêt au comptant publiés par la BNS[C].

Le taux d'intérêt au comptant est normalement équivalent au rendement des emprunts à coupon zéro mais, pendant une période transitoire qui dure encore, il inclut pour les plus anciennes années des rendements d'emprunts de la Confédération. Le taux d'intérêt $\phi_{10/10}$ calculé pour l'exercice 2005 est par exemple une moyenne des rendements moyens des emprunts de la Confédération à 10 ans émis de 1996 à 2000 d'une part et des rendements des emprunts à coupon zéro à 10 ans émis de 2001 à 2005 d'autre part. Ce taux $\phi_{10/10}$ s'élève à 3,12% contre 3,37% l'année précédente.

Si les excédents d'intérêts sont insuffisants pour financer l'allocation de renchérissement, l'assureur-accidents peut prélever une prime de répartition auprès des assurés actifs de son portefeuille LAA. Le problème est que l'assureur-accidents n'est pas sûr d'avoir un effectif d'actifs et le cas échéant, il ne pourrait prélever la prime de répartition. Ce risque a été résolu par la création d'un fonds de renchérissement LAA qui garantit à tout assureur-accidents affilié le versement d'un paiement compensatoire par le pool. Actuellement (2006) la participation au fonds n'est pas obligatoire et pourtant, à quelques exceptions près, la plupart des assureurs-accidents s'y sont affiliés.

[C] Les taux d'intérêt au comptant sont publiés sur le site Internet de la Banque nationale: www.snb.ch → Publications → Bulletin mensuel de statistiques économiques → E Taux d'intérêt et rendements → Rendements d'obligations.

Étant donné que le passif effectif d'un assureur-accidents est influencé par son affiliation au fonds, cet aspect doit être pris en considération dans l'évaluation.

3.3.1.1 Estimation non biaisée des réserves pour un assureur non affilié

L'estimation non biaisée des réserves, pour un assureur non affilié, est la valeur actuelle (*VA*) d'une rente indexée.
Soit a la valeur de la rente versée annuellement sans la compensation du renchérissement. Le versement l'année i est égal à a corrigé du renchérissement $(1+t_i)^i$, autrement dit $a\cdot(1+t_i)^i$. La valeur actuelle des flux de trésorerie qui correspondent aux versements de rentes indexés est donc

$$VA=\sum_{i=1}\frac{a\cdot(1+t_i)^i}{(1+r_i^{(0)})^i}\approx\sum_{i=1}\frac{a}{(1+r_i^{(0)}-t_i)^i}$$

Dans cette équation, $r_i^{(0)}$ désigne le taux d'intérêt sans risque à i ans en t_0. Pour simplifier, on admet que la différence entre la valeur du taux à i ans en t_0 et le taux d'inflation, soit $r_i^{(0)}-t_i$, peut être approximée par un taux réel fixé à 1,5%. Il s'ensuit que:

$$VA\approx\sum_i\frac{a}{(1+0.015)^i}.$$

Les réserves pour rentes LAA se composent de cette valeur actuelle (*VA*) et des réserves constituées selon l'OLAA 111/3, ces dernières ayant souvent le caractère de réserves de vieillissement. En revanche, les réserves selon OLAA 111/1 sont considérées comme porteuses de risques. L'assureur accidents pourrait les dissoudre en cas de catastrophe, c'est pourquoi elles ne sont pas intégrées dans l'estimation non biaisée des réserves.

3.3.1.2 Estimation non biaisée des réserves pour un assureur affilié au fonds de renchérissement

Le SST postule que le fonds de renchérissement LAA continuera d'exister et de fonctionner dans le futur. Cela signifie qu'un membre du pool peut tabler sur une contribution (paiement compensatoire du pool) pour financer le renchérissement, en cas de besoin. En d'autres termes, les réserves pour rentes ne doivent pas intégrer les versements futurs au titre du renchérissement.

L'évaluation des réserves pour rentes LAA d'un assureur affilié au pool comporte les éléments suivants:

- la réserve mathématique des rentes, calculée selon les règles OLAA 108;
- les passifs envers le fonds de renchérissement;
- les réserves selon OLAA 111/3.

4. Modèle standard des risques de marché, de crédit et d'assurance

4.1 Modèle standard des risques de marché (sans risque de crédit)

Nous renvoyons aussi le lecteur aux documents suivants:

- «SST 2006 Marktrisikomodell»
- «Beschreibung des Inputs für die Sensitivitäten im Marktrisikomodell für den SST Feldtest 2006»

Le modèle standard des risques de marché repose sur l'hypothèse que les fluctuations du capital porteur de risque peuvent être décrites comme fonction des facteurs de risque à l'aide des risques de marché. Ces facteurs sont, entre autres, les taux d'intérêt pour plusieurs durées et monnaies, les indices d'actions, les cours de change, les indices du marché immobilier, les spreads obligataires, les volatilités implicites. On dénombre ainsi 74 facteurs de risque de marché dans le SST Pilote 2006.

Le modèle standard postule aussi la distribution normale multivariée des facteurs de risque de marché. Les volatilités et les coefficients de corrélation sont donnés pour la plupart d'entre eux, mais il y a des exceptions. Pour les volatilités et les corrélations des *hedge funds* et des investissements en *private equity*, dont les comportements sont très variables, il n'est en effet pas judicieux de prescrire des valeurs fixes. Chacun doit déterminer ces variables pour son propre portefeuille.

Chacun doit également établir les sensibilités de son portefeuille. Les sensibilités sont les dérivées partielles du capital porteur de risque pour les différents facteurs de risque de marché. En règle générale elles sont approximées par un quotient différentiel. Voici un exemple:

Soit le taux d'intérêt à 10 ans en CHF défini comme le facteur de risque r_{10}. Lorsque ce taux varie, les actifs et les passifs varient aussi, mais pas dans les mêmes proportions, ce qui représente un risque. Admettons qu'une hausse de r_{10} de 100 points de base (pb) engendre une réduction des actifs de 1 million de CHF et des passifs de 1,2 millions de CHF. La sensibilité du capital porteur de risque au facteur r_{10} se calcule alors comme suit:

$$s_{r_{10}} := \frac{\partial CR}{\partial r_{10}} \approx \frac{-1-(1{,}2)}{100}\frac{\text{MCHF}}{\text{pb}} = \frac{200\,000}{100}\frac{\text{CHF}}{\text{pb}} = 2000\,\text{CHF}/\text{pb}$$

Le capital porteur de risque augmente donc de 2000 CHF pour chaque hausse du taux d'intérêt à 10 ans d'un point de base.

Dans le modèle des risques de marché, on connaît ainsi les variances et les covariances des facteurs de risque d'une part et les corrélations des actifs et des passifs avec ces facteurs d'autre part. La variance du capital porteur de risque induite par les fluctuations des facteurs de risque de marché se définit donc ainsi:

$$Var = \begin{pmatrix} s_1\sigma_1 & \dots & s_{74}\sigma_{74} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \dots & \dots & \rho_{1,74} \\ \rho_{2,1} & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \rho_{73,74} \\ \rho_{74,1} & \dots & \dots & \rho_{74,73} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1\sigma_1 \\ s_2\sigma_2 \\ \vdots \\ s_{73}\sigma_{73} \\ s_{74}\sigma_{74} \end{pmatrix}$$

σ_i représente la volatilité du facteur de risque de marché i, $\rho_{i,j}$ le coefficient de corrélation entre les deux facteurs de risque de marché i et j, et s_i la sensibilité au facteur de risque de marché i.

4.2 Modèle standard du risque de crédit: exigences de fonds propres selon Bâle II – Brève introduction pour le SST

Nous donnons ici un aperçu de l'approche standard dite Bâle II qui doit être appliquée dans le cadre du SST afin de déterminer les exigences de fonds propres pour les risques de crédit. Les références indiquées renvoient aux numéros de paragraphe (§§) du document édité par le Comité de Bâle sur le contrôle bancaire (BRI) en juin 2004 intitulé «Convergence internationale de la mesure et des normes de fonds propres»[D].

Divergences par rapport à Bâle II:

- pas d'exigences de fonds propres pour les actions et les participations (ch. 4.2.2.5 et 4.2.2.6);
- acceptation des polices d'assurance vie nanties comme garantie pour l'atténuation du risque de crédit (ch. 4.2.3.1)

4.2.1 Principes

Toutes les créances sont pondérées d'un facteur de risque spécifique qui est fonction de la notation de crédit de la contrepartie ou de l'émetteur. La multiplication de l'exposition déterminante par la pondération du risque donne l'«actif pondéré du risque».

La pondération du risque dépend du type de contrepartie ou d'émetteur (État, banque, entreprise, portefeuille de clientèle de détail) et de sa notation de crédit (pour autant qu'il en ait une). Les garanties et autres formes d'atténuation du risque de crédit entraînent une réduction de l'exposition déterminante.

4.2.1.1 Notation de crédit

Les notations des agences S&P, Moody's et Fitch sont reconnues dans le cadre du SST. Les entreprises peuvent demander à l'OFAP l'autorisation d'utiliser les notations d'autres agences.

Les notations sont converties en pondération du risque en fonction du type de contrepartie ou d'émetteur (§§ 53, 63, 66, 103).

Aux fins du SST, les notations de Moody's et Fitch sont substituées par des notations S&P sur la base de la table d'équivalences suivante, puis converties en pondération du risque selon les critères de Bâle II:

S&P	Moody's	Fitch
AAA	Aaa	AAA
AA-	Aa3	AA-
A+	A1	A+
A-	A3	A-
BBB+	Baa1	BBB+
BBB-	Baa3	BBB-
BB+	Ba1	BB+
BB-	Ba3	BB-
B-	B3	B-
non noté	non noté	non noté

Si l'entreprise souhaite utiliser d'autres notations que celles de S&P, Moody's et Fitch, elle doit joindre à sa requête une matrice de conversion analogue.

[D] http://www.bis.org/publ/bcbs107fre.htm

Les entreprises peuvent recourir à un sous-ensemble des agences de notation ci-dessus et des agences additionnelles pour lesquelles elles ont obtenu une autorisation. Ce sous-ensemble doit être clairement délimité et en cas d'utilisation de plus d'une agence de notation, il faut veiller aux exigences formulées aux §§ 96 à 98 lors de l'établissement de la pondération du risque.

A noter également qu'une distinction doit être faite entre la notation des émetteurs et celle des émissions (§§ 99 à 101).

4.2.1.2 Type de contrepartie ou d'émetteur

Le système Bâle II distingue plusieurs types de contreparties et d'émetteurs:

- emprunteurs souverains et leurs banques centrales, organismes étatiques, autres organismes publics et banques multilatérales de développement (§§ 53 à 59)
- banques (§§ 60 à 64)
- entreprises d'investissement (§ 65)
- entreprises (§§ 66 à 68)
- portefeuilles de clientèle de détail (§§ 69 à 71)
- créances garanties par immobilier résidentiel (§ 72)
- créances garanties par immobilier commercial (§ 74)

Des tables de pondération ont été définies pour les emprunteurs souverains (États), les organismes étatiques, les autres organismes publics (§ 53), les banques, les entreprises d'investissement (§ 63) et les entreprises (§ 66). Ces matrices établissent une équivalence entre la pondération du risque et la notation externe de la contrepartie ou de l'émetteur.

Les postes particuliers tels que les prêts impayés (§§ 75 à 78), les créances à risque élevé (§§ 79 à 80) et les éléments hors bilan (§§ 82 à 89) sont réglés séparément.

4.2.1.3 Pondération des actifs risqués

Le produit de l'exposition nette multipliée par la pondération du risque, qui dépend du type de contrepartie ou d'émetteur et de sa notation de crédit, est un actif pondéré par le risque. L'atténuation du risque de crédit (ch. 4.2.3) entraîne une adaptation des pondérations, du moins dans le modèle simple.

Dans l'approche globale, l'atténuation du risque de crédit permet de déterminer l'exposition déterminante à partir de l'exposition brute minorée de l'effet d'éventuelles sécurités.

Le calcul de l'exposition déterminante des instruments financiers dérivés et des engagements conditionnels fera l'objet des paragraphes 4.2.4 et 4.2.5.

4.2.1.4 Agrégation

Dans le régime de Bâle II l'agrégation des risques est purement additive, ce qui veut dire que les aspects portefeuille et diversification sont déjà inclus dans les pondérations des risques.

Le total des actifs pondérés du risque correspond à la somme de tous les actifs pondérés du risque.

4.2.1.5 Exigence de fonds propres

Les exigences de fonds propres, pour les risques de crédit, s'élèvent à 8% de la somme de tous les actifs pondérés du risque.

4.2.2 Créances

4.2.2.1 Obligations

Les portefeuilles d'obligations sont traités comme des créances sur l'émetteur. Ils doivent donc être pondérés en fonction du type d'émetteur, à savoir emprunteur souverain, banque, entreprise, etc.

4.2.2.2 Crédits

Les crédits, à l'exception des prêts hypothécaires qui remplissent les critères énoncés au § 72, sont considérés comme des créances sur le débiteur. Ils doivent donc être pondérés en fonction du type de débiteur, à savoir emprunteur souverain, banque, entreprise, etc.

Les créances garanties par des immeubles commerciaux sont pondérées conformément au § 74.

4.2.2.3 Prêts hypothécaires

Les prêts hypothécaires répondant aux critères du § 72 sont pondérés à 35%.

4.2.2.4 Éléments hors bilan

Les éléments hors bilan recouvrent différentes catégories telles que les instruments financiers dérivés, les garanties et les promesses d'engagement. Le point commun à tous les éléments hors bilan est que leur montant est converti en une exposition déterminante au moyen d'un «facteur de conversion en équivalent-crédit» (FCEC) (§§ 82 à 89). Le FCEC sert à établir une projection de l'exposition potentielle au risque.

Les expositions déterminantes définies de la sorte sont ensuite multipliées par la pondération du risque, qui est fonction de la contrepartie (ch. 4.2.2.2), et le produit obtenu est un actif au risque pondéré.

<u>Instruments financiers dérivés</u>

Un risque de contrepartie peut découler des positions d'instruments dérivés. Le paragraphe 4.2.4 explique comment traiter les instruments dérivés qui ne sont pas négociés à une bourse reconnue et ne sont pas soumis à des appels de marge obligatoire quotidiennement.

<u>Garanties</u>

Le traitement des engagements conditionnels et des garanties est expliqué au paragraphe 4.2.5.

<u>Promesses d'engagement</u>

Cf. § 83

4.2.2.5 Actions

Aucune exigence de fonds propres pour le risque de crédit.

4.2.2.6 Participations

Aucune exigence de fonds propres pour le risque de crédit.

4.2.2.7 Créances titrisées

Les §§ 538 à 605 règlent la manière d'évaluer les opérations de titrisation.

4.2.3 Atténuation du risque de crédit

L'atténuation du risque de crédit (ARC) désigne les techniques dont le but est de réduire les risques de crédit, telles que les nantissements, les garanties, les accords de compensation ou encore les dérivés de crédit. Les effets de l'atténuation du risque de crédit peuvent, mais ne doivent pas obligatoirement être pris en considération dans le SST.

Les garanties et les dérivés de crédit ne peuvent être comptabilisés que s'ils sont directs, explicites, irrévocables et inconditionnels (§§ 140 à 141).

L'atténuation du risque de crédit ne peut être prise en compte dans son intégralité que si les durées des expositions et des ARC sont symétriques (§§ 143 et 202 à 205).

Remarque: les créances garanties par immobilier sont traitées aux paragraphes 4.2.2.2 et 4.2.2.3; les gages immobiliers pris en considération à ce titre ne doivent pas être comptabilisés dans l'atténuation du risque de crédit.

4.2.3.1 Sûretés

Le SST permet deux variantes de comptabilisation des sûretés : l'approche simple et l'approche globale.

Approche simple

Dans l'approche simple décrite aux §§ 182 à 185, la pondération du risque de l'exposition est remplacée par la pondération du risque de l'ARC. Le § 145 énumère les sûretés admises.
Outre les sûretés désignées au § 145, une police d'assurance vie qui a été nantie peut être comptabilisée comme sûreté à concurrence de sa valeur de rachat. Si le créancier est également l'émetteur de la police, la pondération du risque affectée à la fraction protégée de la créance est de 0% (complément au §§ 183 à 185).

Approche globale

L'approche globale est plus détaillée et permet d'intégrer d'autres sûretés conformément au § 146. Dans l'approche globale, la volatilité de la fraction protégée doit être prise en compte au moyen de décotes affectées tant aux expositions qu'aux sûretés (§§ 151 à 153). L'exposition déterminante se calcule selon la formule indiquée au § 147.

Les entreprises d'assurances qui souhaitent utiliser des décotes internes le peuvent. Elles doivent cependant démontrer que toutes les exigences posées aux §§ 154 à 181 sont satisfaites.

4.2.3.2 Garanties

Lorsqu'une garantie remplit les exigences formulées aux §§ 189, 190 et 195, la pondération de risque du constituant est affectée à la fraction protégée de l'exposition initiale (§§ 196 à 201).

4.2.3.3 Accords de compensation

Le facteur d'atténuation du risque inhérent aux accords de compensation doit être pris en considération conformément au § 188.

4.2.3.4 Dérivés de crédit

Seuls les contrats dérivés sur défaut (*credit default swaps*) et sur rendement total (*total return swaps*) sont admis au titre d'atténuation du risque de crédit dans le SST (§§ 193 et 194). Si les exigences posées aux §§ 189 à 192 et 195 sont remplies, la pondération de risque du constituant est affectée à la fraction protégée de l'exposition initiale (§§ 196 à 201).

4.2.4 Exposition des instruments dérivés

L'équivalent-crédit des contrats à terme (y compris les opérations au comptant non exécutées qui ne sont pas portées au bilan) peut être déterminé, au choix, selon la méthode d'évaluation au prix du marché ou selon la méthode d'évaluation du risque initial. Seule la méthode d'évaluation au prix du marché est applicable aux options achetées.

4.2.4.1 Méthode d'évaluation au prix du marché

Dans la méthode d'évaluation au prix du marché, l'exposition déterminante s'obtient par l'addition d'une majoration (*add-on*) à la valeur de remplacement de chaque contrat (*replacement value*) afin de couvrir le risque de crédit potentiel encouru pendant la durée résiduelle du contrat. A concurrence de son montant, une majoration peut être compensée par la valeur de remplacement négative du contrat correspondant.

Pour les contrats à terme et les options achetées, les majorations suivantes sont applicables en fonction de chaque instrument sous-jacent (en pour-cent):

	Durée résiduelle		
	< 1 an	**de 1 à 5 ans**	**> 5 ans**
Taux d'intérêt	0,0	0,5	1,5
Devises et or	1,0	5,0	7,5
Actions	6,0	8,0	10,0
Indices d'actions	4,0	5,0	7,5
Métaux précieux	7,0	8,0	10,0
Autres matières premières	12,0	13,0	15,0

La durée de l'instrument sous-jacent est déterminante pour les contrats sur taux d'intérêts et la durée du contrat pour les autres instruments.

4.2.4.2 Méthode d'évaluation du risque initial

Avec la méthode d'évaluation du risque initial, l'exposition déterminante s'obtient en multipliant la valeur nominale de chaque contrat par son facteur de conversion en équivalent-crédit.

Pour les contrats à terme et les options achetées, les facteurs de conversion en équivalent-crédit suivants sont applicables en fonction de chaque instrument sous-jacent (en pour-cent):

	Durée initiale	
	pour la première année	**pour chaque année supplémentaire entamée**
Taux d'intérêt	1,0	2,0 p.a.
Devises et or	4,0	6,0 p.a.
Actions	12,0	9,0 p.a.
Indices d'actions	8,0	6,0 p.a.
Métaux précieux	14,0	10,0 p.a.
Autres matières premières	24,0	18,0 p.a.

4.2.4.3 Bases de calcul

Les majorations et les facteurs de conversion en équivalent-crédit sont appliqués sur les bases suivantes:

- pour les instruments tels les *forward rate agreements*, les swaps sur taux d'intérêt et autres instruments analogues, en fonction de la valeur nominale du contrat ou de la valeur actualisée de la part créancière, composée de la valeur nominale et des intérêts;
- pour les swaps sur devises, en fonction de la valeur nominale de la part créancière, c'est-à-dire de la base de calcul déterminante pour la fixation des intérêts à encaisser, ou en fonction de la valeur actualisée de la part créancière, composée de la valeur nominale et des intérêts;
- pour les swaps sur indices d'actions, métaux précieux, métaux non ferreux ou marchandises, en fonction du montant nominal de la contre-prestation convenue ou – à défaut de contre-prestation nominale – de la base de calcul «quantité×prix convenu» ou de la valeur de marché de la prétention à la livraison ou de la valeur actualisée de la part créancière, composée de la valeur nominale et des intérêts;
- pour les autres opérations à terme, en fonction de la valeur de marché de la créance en argent ou de la prétention à la livraison;

- pour les options, selon les mêmes bases de calcul que pour les autres opérations à terme, mais évaluées au facteur delta correspondant.

4.2.4.4 Exceptions

Il est possible de renoncer à une majoration pour:
- les contrats d'une durée initiale de quatorze jours au plus;
- *les contrats négociés auprès d'une bourse reconnue* où ils sont, à l'exception des options achetées, *soumis à un appel de marge quotidien*;
- les contrats traités hors bourse qui remplissent toutes les conditions suivantes:
  1. ils sont traités sur un marché représentatif,
  2. les opérations sont effectuées contre remise de garanties; la garantie est constituée par des dépôts de fonds ou par le nantissement, ou une autre forme de sûreté de qualité au moins équivalente, de valeurs mobilières, métaux précieux et marchandises négociables,
  3. les contrats et les garanties sont évalués quotidiennement au cours du marché et soumis à un appel de marge quotidien.

4.2.4.5 Accords de compensation

Les entreprises qui appliquent la méthode de l'évaluation au prix du marché peuvent compenser les valeurs de remplacement positives et l'intégralité des majorations, d'une part, et les valeurs de remplacement négatives, d'autre part, résultant de contrats à terme et d'options avec la même contrepartie, à condition qu'un accord ait été conclu avec cette contrepartie, accord dont il est établi qu'il est reconnu et peut être exécuté dans les législations suivantes:
- la législation de l'État où la contrepartie a son siège et, lorsqu'une succursale étrangère d'une entreprise participe à l'opération, en sus, celle de l'État du siège de la succursale,
- la législation qui régit les diverses transactions prises en compte, et
- la législation qui régit les accords requis pour effectuer la compensation.

La compensation est admise dans les cas suivants:
- pour toutes les opérations couvertes par un accord de compensation aux termes duquel, si la contrepartie fait défaut pour cause d'insolvabilité, de faillite, de liquidation ou de circonstances semblables, l'entreprise n'a que le droit de recevoir ou l'obligation de payer la différence entre les bénéfices et les pertes non réalisés dans le cadre des transactions prises en compte (*close-out netting*);
- pour tous les engagements et créances réciproques dans la même monnaie et avec la même échéance qui sont rassemblés par un contrat de novation conclu entre l'entreprise et la contrepartie de telle manière qu'il résulte de la novation un montant net unique et ainsi un nouveau contrat obligatoire éteignant les contrats antérieurs (*netting-by-novation*);
- pour les transactions compensées, à condition qu'un accord de compensation de position (*payment-netting*) ait été conclu, prévoyant qu'au jour de l'échéance le solde des engagements réciproques de paiement est déterminé pour chaque monnaie et que seul ce solde doit être acquitté.

La compensation n'est pas autorisée lorsque l'accord contient une disposition qui permet à la partie non défaillante de n'effectuer que des paiements limités, voire aucun paiement, à la partie défaillante, même si cette dernière a un solde créancier (clause d'exception d'inexécution; *walk-away clause*).

4.2.5 Engagements conditionnels

L'exposition déterminante des engagements conditionnels et des engagements irrévocables est obtenue par la multiplication de la valeur nominale ou de la valeur actualisée de chaque transaction avec son facteur de conversion en équivalent-crédit.

Les facteurs de conversion en équivalent-crédit suivants sont applicables:

Facteurs	Instruments
0,5	• Prestations de garantie telles que les garanties de soumission (*bid bonds*), les garanties de livraison et d'exécution (*performance bonds*) y compris les garanties pour les défauts de l'ouvrage qui ne sont pas pondérées du facteur 0,25 • Autres prestations de garantie telles que les engagements par avals, cautionnements et garanties, ainsi que les autres engagements résultant d'accréditifs (*standby letters of credit*) qui n'assurent pas le risque de recouvrement • Limites de crédits non couvertes et irrévocables, y compris les *note issuance facilities*, les *revolving underwriting facilities* et les instruments semblables avec un engagement ferme d'une durée résiduelle de plus d'un an • Garanties de remboursement d'acomptes liées à une prestation
1,0	• Engagements par avals, cautionnements et garanties ainsi que les garanties irrévocables résultant d'accréditifs (*standby letters of credit*) assurant le risque de recouvrement
1,25	• Engagements de libérer les actions et les autres titres de participation qui ne sont pas comptabilisés sous participations ou de faire des versements supplémentaires pour ces titres
2,5	• Engagements de libérer les actions et les autres titres de participation lorsqu'il s'agit de participations qui ne doivent pas être consolidées ou de faire des versements supplémentaires pour ces titres
6,25	• Engagements de libérer les actions et les autres titres de participation lorsqu'il s'agit de participations qui doivent être consolidées ou de faire des versements supplémentaires pour ces titres

Les engagements conditionnels pour lesquels l'entreprise d'assurances a donné des sous-participations peuvent, dans les limites de la sous-participation, être pondérées comme les créances directes contre les sous-participants respectifs.

4.3 Modèle standard pour les assurances vie

Non disponible au present.

4.4 Modèle standard pour les assurances dommages et accidents

Nous définissons ici le modèle standard pour les assurances dommages et accidents. Nous introduirons d'abord de nouvelles notations au paragraphe 4.4.1 et expliciterons quelques hypothèses au paragraphe 4.4.2. Le paragraphe 4.4.3 sera consacré à la répartition des affaires entre les différentes branches d'assurance. Enfin, aux paragraphes 4.4.4 et 4.4.5 nous examinerons ce que la définition du capital cible donnée en (2b)

$$CC_\alpha = -ES_\alpha\left(\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0)\right) + \frac{MVM(1)}{1+r_1^{(0)}}$$

implique pour un assureur dommages et accidents.

Étant donné que le terme $\frac{MVM(1)}{1+r_0}$ ne sera abordé qu'au chapitre 6, nous nous limiterons ici au premier terme de l'équation $ES_\alpha\left(\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0)\right)$. L'objectif est donc d'abord de déterminer une distribution de $\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0)$ pour laquelle il sera possible de calculer l'*expected shortfall* au niveau de sécurité $1\text{-}\alpha$. Le capital porteur de risque a été défini comme la différence entre la valeur de marché actuelle de tous les actifs (*A*) et l'estimation non biaisée de la valeur actualisée de l'espérance mathématique des passifs (*L*), soit

$$CR(t) = A(t) - L(t)$$

On peut donc décomposer l'équation comme suit:

$$\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0) = \left(\frac{A(1)}{1+r_1^{(0)}} - A(0)\right) - \left(\frac{L(1)}{1+r_1^{(0)}} - L(0)\right) \tag{4}$$

Cette formule sera transformée à l'aide des paramètres et variables habituels dans les assurances dommages et accidents.

Aux paragraphes 4.4.6 à 4.4.11, nous verrons comment obtenir les fonctions de distribution des variables actuarielles stochastiques qui sont les charges de sinistres et les réserves.

4.4.1 Notations pour les assureurs non-vie

Date du sinistre	Date attribuée à un sinistre. Dans la plupart des branches, il s'agit de la date effective du sinistre. Certaines branches dans lesquelles les polices de type *claims made* sont usuelles font toutefois exception. Dans ce cas, la date du sinistre est la date de la déclaration du sinistre.
AC	«Année en cours», c'est-à-dire l'année civile au cours de laquelle le SST est effectué.
Sinistres AC, nouveaux sinistres	Sinistres dont la date se situe durant l'AC. Au 01.01.AC ce sont des sinistres futurs, raison pour laquelle on les désigne par «nouveaux sinistres».
AP	«Années précédentes», c'est-à-dire les années qui précèdent l'année civile au cours de laquelle le SST est effectué.
Sinistres AP	Sinistres dont la date se situe dans les AP.

t_0	Début de l'AC.
t_1	Fin de l'AC.
UPR	«*Unearned premium reserve*», c'est-à-dire report de primes au 01.01.AC.
P	Estimation en t_0 des primes acquises durant l'AC (déterministe).
F	Estimation en t_0 des frais administratifs et d'exploitation durant l'AC (déterministe).
S_{AC}	Variable aléatoire de la charge de sinistres non actualisée de l'AC.
S_{AC}^{GS}	Contribution des grands sinistres à S_{AC}.
S_{AC}^{PS}	Contribution des petits sinistres à S_{AC}.
$(\alpha_k)_{k\geq 0}$	Modèle de règlement des sinistres AC, normalisé par $\sum_{k\geq 0}\alpha_k = 1$. On admet par convention que les règlements de sinistres interviennent à la fin de chaque année. L'indice $k = 0,1,2,...$ numérote les années de règlement. Le règlement à la fin de l'AC est donc donné par $\alpha_0 S_{AC}$.
$R_{AP}^{(0)}$	Estimation non biaisée des réserves pour sinistres au 01.01.AC pour les sinistres AP.
$(\beta_k)_{k\geq 0}$	Modèle de règlement des sinistres AP, normalisé par $\sum_{k\geq 0}\beta_k = 1$, où k désigne l'année de règlement et $k = 0$ se réfère à l'année en cours.
$C_{AP}\times R_{AP}^{(0)}$	Réévaluation de la charge $R_{AP}^{(0)}$ au 31.12.AC, soit réévaluation des règlements intervenus pendant l'AC et des réserves pour sinistres AP au 31.12.AC. C_{AP} joue le rôle d'un facteur de correction stochastique. Ainsi $(1-C_{AP})R_{AP}^{(0)}$ est-il le résultat de liquidation non actualisé.
D et d	«*Discount factor*», soit facteur d'actualisation des sinistres, défini comme le rapport de la valeur actualisée à la valeur nominale d'un nombre déterminé de sinistres.
$D_{AP}^{(1)}$	Variable aléatoire du facteur d'actualisation des sinistres AP au 31.12.AC, définie par $$D_{AP}^{(1)} = V_0^{(1)}\cdot\beta_0 + V_1^{(1)}\cdot\beta_1 + ... + V_n^{(1)}\cdot\beta_n$$ Le facteur d'actualisation dépend de la courbe des taux d'intérêt au 31.12.AC (laquelle est encore incertaine au 01.01.AC) et du modèle de règlement des sinistres AP.
$D_{AC}^{(1)}$	Variable aléatoire du facteur d'actualisation des sinistres AC au 31.12.AC, définie par $$D_{AC}^{(1)} = V_0^{(1)}\cdot\alpha_0 + V_1^{(1)}\cdot\alpha_1 + ... + V_n^{(1)}\cdot\alpha_n$$ Le facteur d'actualisation dépend de la courbe des taux d'intérêt au 31.12.AC (laquelle est encore incertaine au 01.01.AC) et du modèle de règlement des sinistres AC.
$d_{AC}^{(0)}$	Facteur d'actualisation au 01.01.AC avec la courbe des taux d'intérêt au 01.01.AC (pour les sinistres AC), défini par $$d_{AC}^{(0)} = v_1^{(0)}\cdot\alpha_0 + v_2^{(0)}\cdot\alpha_1 + ... + v_{n+1}^{(0)}\cdot\alpha_n$$

$d_{AP}^{(0)}$	Facteur d'actualisation au 01.01.AC avec la courbe des taux d'intérêt au 01.01.AC (pour les sinistres AP), défini par $d_{AP}^{(0)} = v_1^{(0)} \cdot \beta_0 + v_2^{(0)} \cdot \beta_1 + ... + v_{n+1}^{(0)} \cdot \beta_n$
α	Plusieurs significations possibles: Premièrement, α désigne le quantile applicable dans le cadre du SST, normalement avec la valeur 1%. Deuxièmement, α a été utilisé précédemment comme symbole du modèle de règlement des sinistres déjà survenus. Et troisièmement, α est aussi employé pour désigner les paramètres de Pareto dans les distributions des grands sinistres.
Pool dn, Pdn	Pool Dommages naturels
Pex	Perte d'exploitation
RCvm	Responsabilité civile des véhicules à moteur
Cvm	Casco des véhicules à moteur

4.4.2 Hypothèses

Le modèle standard du SST pour les assureurs non-vie repose sur les hypothèses suivantes:

- Le risque découle des incertitudes concernant:
    1. les placements (fluctuations de valeur et défaillances) et l'évolution de la courbe des taux d'intérêt, avec des effets simultanés sur les actifs et les passifs;
    2. la charge de sinistres des nouveaux sinistres (sinistres AC);
    3. l'ampleur des réserves pour sinistres.
- Sont considérées comme des valeurs déterministes:
    1. les primes acquises P pour l'année en cours (AC),
    2. les frais administratifs et d'exploitation *F*,
    3. les modèles de liquidation $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ et $(\beta_k)_{k\geq 0}$ pour les sinistres AC et AP respectivement. (Seule l'ampleur des réserves est considérée comme stochastique, mais pas leur rythme de liquidation.)
- Le caractère aléatoire des taux d'intérêt futurs est indépendant des variables actuarielles telles que la charge de sinistres ou les réserves nominales pour sinistres.
- Les réserves pour sinistres non actualisées qui se réfèrent aux sinistres AP sont telles que leur espérance mathématique ne se traduit ni par un bénéfice ni par une perte de liquidation. En d'autres termes, l'espérance mathématique du résultat de liquidation est nulle et les réserves sont constituées selon le principe de l'estimation non biaisée. Pour le facteur de correction introduit précédemment, cela signifie que $E[C_{AP}] = 1$.

Par convention, les primes et les frais sont comptabilisés en début d'année et les règlements de sinistres en fin d'année. Aucun nouveau contrat prenant naissance après la fin de l'année en cours n'est pris en considération. Un éventuel report de primes en fin d'année ne peut donc être pris en compte.

Les frais sont subdivisés en deux catégories:

- Premièrement, les frais de gestion des sinistres, à savoir les frais encourus lors de la liquidation des sinistres. Cette catégorie est elle-même subdivisée en deux:
    1. Les frais de gestion de sinistre non affectés, c'est-à-dire les frais encourus lors de la liquidation des sinistres qu'il n'est pas possible d'attribuer à un sinistre en particulier, par exemple les salaires, l'entretien des systèmes informatiques et d'autres frais administratifs. On utilise fréquemment l'abréviation anglaise ULAE qui signifie *unallocated loss adjustment expenses*.
    2. Les frais de gestion de sinistre affectés, que l'on peut attribuer à un sinistre spécifique, par exemple les frais judiciaires ou les honoraires d'avocat, etc.

- Deuxièmement, les frais administratifs et d’exploitation *F*.

Une réserve doit être constituée au titre des futurs frais de gestion des sinistres (ULAE et ALEA) pour les sinistres dont la date se situe dans le passé. Souvent les réserves ALAE sont déjà incluses dans les réserves pour sinistres. Dans ce cas, seules les réserves ULAE doivent être analysées séparément. Il est possible de recourir à la «méthode new-yorkaise» à cette fin.

4.4.3 Répartition des affaires par branches dans le SST

Treize branches d’assurance sont prises en considération (liste à l’annexe 8.4.1). Les risques inhérents au portefeuille en liquidation (risques inclus dans les réserves pour sinistres AP) sont évalués en fonction de cette liste de branches. Aux fins d’évaluation des risques relatifs aux nouveaux sinistres, les dommages naturels sont cependant exclus de la branche Choses et traités séparément. Les dommages naturels comprennent les dommages pris en charge par le Pool Dommages naturels (Pool dn) et d’autres dommages naturels comme la perte d’exploitation consécutive à un événement naturel assuré. La raison est que les dommages du Pool dn et les autres dommages naturels sont étroitement corrélés dans le secteur des grands sinistres. Dans le modèle standard du SST ils sont d’ailleurs traités simultanément.

4.4.4 Répartition du risque global en risques techniques, risques du marché financier et risques de gestion actif-passif (GAP)

Pour une entreprise d’assurances, le risque d’un sinistre peut être décomposé en un risque de marché et un risque technique, car la valeur actualisée des passifs dépend d’une part des taux d’intérêt et d’autre part de la valeur nominale du dommage. Le risque global s’exprime à travers la multiplication des risques de taux par les risques techniques. Nous allons voir maintenant comment dissocier ces deux composantes du risque par linéarisation du produit mathématique. Soulignons d’emblée que la linéarisation est simplifiée (développement de Taylor du premier ordre d’un produit de deux variables aléatoires indépendantes au point de l’espérance mathématique des deux variables).

Le résultat est une somme de termes dont une partie peut être identifiée au risque de marché et l’autre au risque technique.

4.4.4.1 Sinistres AC

Nous excluons ici les réserves pour sinistres AP et supposons donc que nous partons «de zéro». Dans le présent paragraphe 4.4.4.1 nous examinerons ainsi la formule (4) pour les sinistres AC exclusivement.

Par ailleurs, nous débutons avec une valeur d’actifs A(0) au début des calculs. En ce qui concerne les passifs correspondant aux sinistres AC, nous ne disposons au début des calculs que des reports de primes. Autrement dit $L(0) = UPR$.

Étant donné que le SST ne s’appuie pas sur les valeurs nominales mais sur des valeurs actuelles, nous devons tout d’abord déterminer à quel moment les flux de trésorerie interviennent. A cette fin, nous admettons que les primes acquises P sont versées et les frais d’exploitation F encourus au tout début de l’année. Un rendement stochastique R_I est réalisé durant l’année sur le montant $A(0) + (P - UPR) - F$ qui en résulte.
De nouveaux sinistres (sinistres AC) surviennent durant l’année. Leur somme est égale à la charge de sinistres non actualisée de l’année en cours S_{AC} .
Enfin, les nouveaux sinistres sont réglés en fin d’année. Conformément à la définition donnée pour le modèle de règlement des sinistres AC, ces règlements de sinistres s’élèvent à $\alpha_0 \cdot S_{AC}$.

En fin d'année, la valeur des actifs s'élève donc à

$$A(1) = (A(0) + (P - UPR) - F)(1 + R_I) - \alpha_0 S_{AC} \tag{5}$$

Les passifs à la fin de l'année en cours, soit en t_1, se composent de la valeur actuelle des futurs règlements de sinistres ($t_2, t_3, t_4, ...$) au titre des sinistres survenus durant l'année en cours. Ils se calculent donc comme suit:

$$L(1) = (V_1^{(1)} \cdot \alpha_1 + V_2^{(1)} \cdot \alpha_2 + ... + V_n^{(1)} \cdot \alpha_n) \cdot S_{AC} \tag{6}$$

Si l'on reprend la formule (4), on peut calculer la variation actualisée du capital porteur de risque pour l'année en cours:

$$\begin{aligned} &\frac{CR(1)}{1 + r_1^{(0)}} - CR(0) = \\ &\frac{1}{1 + r_1^{(0)}} \left[(A(0) - UPR + P - F) \cdot (1 + R_I) - D_{AC}^{(1)} \cdot S_{AC} - (1 + r_1^{(0)}) \cdot (A(0) - UPR) \right] \end{aligned} \tag{7}$$

$D_{AC}^{(1)}$, qui est le facteur d'actualisation des sinistres AC, a été défini comme

$$D_{AC}^{(1)} \cdot S_{AC} = (V_0^{(1)} \cdot \alpha_0 + V_1^{(1)} \cdot \alpha_1 + ... + V_n^{(1)} \cdot \alpha_n) \cdot S_{AC} \tag{8}$$

Les facteurs d'actualisation $V_j^{(1)}$ et la charge de sinistres S_{AC} sont tous des grandeurs stochastiques. Nous avons donc affaire à un produit de variables aléatoires, la première étant affectée du risque GAP et la seconde d'un pur risque technique. Pour bien distinguer la part de chaque risque, nous procédons à une linéarisation de la formule (8):

$$\begin{aligned} &D_{AC}^{(1)} \cdot S_{AC} \approx \\ &E[D_{AC}^{(1)}] \cdot E[S_{AC}] + \left(D_{AC}^{(1)} - E[D_{AC}^{(1)}]\right) \cdot E[S_{AC}] + E[D_{AC}^{(1)}] \cdot \left(S_{AC} - E[S_{AC}]\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Le premier terme est le produit des espérances mathématiques du facteur d'actualisation et de la charge de sinistres. Le deuxième décrit l'effet des incertitudes relatives aux taux d'intérêt sur la charge de sinistres attendue. Et le troisième exprime la variabilité de la charge de sinistres pour un facteur d'actualisation fixe attendu (par ex. taux d'intérêt donné). La formule (7) se transforme alors en

$$\begin{aligned} &\frac{CR(1)}{1 + r_1^{(0)}} - CR(0) \approx \\ &\frac{1}{1 + r_1^{(0)}} \Big((R_I - E[R_I]) \cdot (A(0) - UPR + P - F) - \left(D_{AC}^{(1)} - E\left[D_{AC}^{(1)}\right]\right) \cdot E[S_{AC}] \\ &+ \left(E[R_I] - r_1^{(0)}\right) \cdot (A(0) - UPR + P - F) + r_1^{(0)} \cdot (P - F) \\ &+ (P - F) - E[D_{AC}^{(1)}] \cdot E[S_{AC}] \\ &- E[D_{AC}^{(1)}] \cdot \left(S_{AC} - E[S_{AC}]\right) \Big) \end{aligned} \tag{10}$$

Cette formule s'interprète de la manière suivante: la variation du capital porteur de risque induite par les sinistres AC se compose des risques du marché financier et de GAP (ligne 1), des revenus du capital attendus sur les actifs (ligne2), de l'espérance mathématique du résultat technique (ligne 3) et du risque technique (ligne 4).

4.4.4.2 Sinistres AP

Nous développons ici la formule (4) pour les sinistres survenus au cours des années précédant l'AC.

Soit $R_{AP}^{(0)}$ l'estimation non biaisée (valeur nominale) des réserves en t_0. La valeur actualisée est alors

$$L_{AP}^{(0)} = \sum_{j=0} v_{i+1}^{(0)} \beta_i R_{AP}^{(0)} = d_{AP}^{(0)} R_{AP}^{(0)} \tag{11}$$

où $d_{AP}^{(0)}$ est le facteur d'actualisation.
La valeur des actifs en t_0 est $A(0)$.

L'estimation non biaisée doit cependant être révisée à cause des informations obtenues en cours d'année. Ainsi, juste avant les règlements de fin d'année, l'estimation des règlements futurs est corrigée du facteur C_{AP}. La nouvelle estimation est donc $C_{AP} \cdot R_{AP}^{(0)}$.

Le règlement qui intervient en fin d'année (en t_1) est $\beta_0 \cdot C_{AP} R_{AP}^{(0)}$, et les futurs règlements seront donc $\beta_i \cdot C_{AP} R_{AP}^{(0)}$, où $i = 1,2,3,\ldots$. Il s'ensuit la formule suivante pour l'estimation non biaisée de la valeur actualisée en t_1 (après le règlement):

$$L_{AP}^{(1)} = \sum_{i=1} V_i^{(1)} \cdot \beta_i \cdot C_{AP} R_{AP}^{(0)} \tag{12}$$

A la fin de l'année, la valeur nominale des actifs a diminué de la valeur du règlement $\beta_0 \cdot C_{AP} R_{AP}^{(0)}$. Si l'on intègre cela dans la formule (4) on obtient donc

$$\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0) = -\frac{\beta_0 \cdot C_{AP} R_{AP}^{(0)} + \sum_{i=1} V_i^{(1)} \cdot \beta_i \cdot C_{AP} R_{AP}^{(0)}}{1+r_1^{(0)}} + d_{AP}^{(0)} R_{AP}^{(0)} \tag{13}$$

Nous décomposons le numérateur du premier terme comme suit:

$$\sum_{j=0} V_i^{(1)} \cdot \beta_i \cdot C_{AP} R_{AP}^{(0)} = D_{AP}^{(1)} \cdot C_{AP} R_{AP}^{(0)} \tag{14}$$

Comme pour les sinistres AC, il en ressort que le risque des réserves se compose du produit du risque de taux d'intérêt (exprimé par le facteur d'actualisation $D_{AP}^{(1)}$) multiplié par la variation des réserves nominales (exprimée par le facteur de correction C_{AP}). Comme pour les risques AC, ce produit peut être linéarisé mais en utilisant $E[C_{AP}] = 1$:

$$\begin{aligned} D_{AP}^{(1)} \cdot C_{AP} &\approx E[D_{AP}^{(1)}] \cdot E[C_{AP}] + E[D_{AP}^{(1)}] \cdot (C_{AP} - E[C_{AP}]) + (D_{AP}^{(1)} - E[D_{AP}^{(1)}]) \cdot E[C_{AP}] \\ &= E[D_{AP}^{(1)}] + E[D_{AP}^{(1)}] \cdot (C_{AP} - 1) + D_{AP}^{(1)} - E[D_{AP}^{(1)}] \\ &= E[D_{AP}^{(1)}] \cdot (C_{AP} - 1) + D_{AP}^{(1)} \end{aligned} \tag{15}$$

En appliquant ce résultat à la formule (4) on obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}}-CR(0) &\approx -\frac{D_{AP}^{(1)}R_{AP}^{(0)}+E[D_{AP}^{(1)}](C_{AP}-1)R_{AP}^{(0)}}{1+r_1^{(0)}}+d_{AP}^{(0)}R_{AP}^{(0)} \\ &= -\frac{D_{AP}^{(1)}-E[D_{AP}^{(1)}]}{1+r_1^{(0)}}R_{AP}^{(0)}-\left(\frac{E\left[D_{AP}^{(1)}\right]}{1+r_1^{(0)}}C_{AP}-d_{AP}^{(0)}\right)R_{AP}^{(0)}\end{aligned} \tag{16}$$

Le premier terme de droite désigne le risque de taux et le second le risque de fluctuation du montant nominal des réserves.

4.4.4.3 Sinistres AP et AC

Si nous regroupons les résultats obtenus pour les sinistres AC et AP, nous obtenons la formule centrale:

$$\begin{aligned}&\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}}-CR(0)\approx \\ &\frac{R_I-E[R_I]}{1+r_1^{(0)}}\cdot(A(0)+(P-UPR)-F)-\frac{D_{AC}^{(1)}-E[D_{AC}^{(1)}]}{1+r_1^{(0)}}\cdot E[S_{AC}]-\frac{D_{AP}^{(1)}-E[D_{AP}^{(1)}]}{1+r_1^{(0)}}\cdot R_{AP}^{(0)} \\ &+\frac{E\left[R_I\right]-r_1^{(0)}}{1+r_1^{(0)}}\cdot(A(0)+(P-UPR)-F) \\ &+(P-F)-\frac{E\left[D_{AC}^{(1)}\right]}{1+r_1^{(0)}}\cdot E\left[S_{AC}\right] \\ &-\frac{E\left[D_{AC}^{(1)}\right]}{1+r_1^{(0)}}\cdot\left(S_{AC}-E\left[S_{AC}\right]\right)-\left(\frac{E\left[D_{AP}^{(1)}\right]}{1+r_1^{(0)}}\cdot C_{AP}-d_{AP}^{(0)}\right)\cdot R_{AP}^{(0)}\end{aligned} \tag{17a}$$

Les quatre lignes qui forment la partie de droite de l'équation (17a) ont les significations et interprétations suivantes:

- La première ligne comporte des valeurs aléatoires qui reflètent les risques du marché financier et de GAP (risque de marché). Les grandeurs incertaines de cette ligne sont la performance R_I et les facteurs d'actualisation $D_{AC}^{(1)}$ et $D_{AP}^{(1)}$, mais elles n'apparaissent que sous la forme de différences avec leurs propres espérances mathématiques ($E[R_I]$, $E[D_{AC}^{(1)}]$, $E[D_{AP}^{(1)}]$). Le risque de GAP est modélisé par une distribution normale.
- La deuxième ligne représente la performance attendue des actifs au-dessus du taux d'intérêt sans risque à un an.
- La troisième ligne est l'espérance du résultat technique.
- La quatrième ligne, à l'instar de la première, est une valeur aléatoire. Elle exprime l'écart entre le résultat technique et son espérance mathématique. L'incertitude provient des inconnues sur la charge de sinistres des sinistres AC et sur le résultat de liquidation des sinistres AP.

Les lignes 1 et 2 ressortissent aux risques du marché financier et de GAP, dont l'analyse (sensibilités) se poursuivra au paragraphe 4.1. Ci-après, nous allons nous concentrer sur le résultat technique et les risques qu'il comporte (lignes 3 et 4).

A cette fin nous posons deux approximations supplémentaires:

$$\frac{E\left[D_{AC}^{(1)}\right]}{1+r_1^{(0)}} \approx d_{AC}^{(0)}$$

et (18)

$$\frac{E\left[D_{AP}^{(1)}\right]}{1+r_1^{(0)}} \approx d_{AP}^{(0)}$$

La justification de ces deux hypothèses résulte de l'observation suivante:

Dans la partie de gauche, nous avons les expressions $E\left[D_{AC}^{(1)}\right]$ et $E\left[D_{AP}^{(1)}\right]$ actualisées en t_0. Cela veut dire que la valeur est actualisée en t_1 avec la courbe des taux en t_1, puis en t_0 avec $1+r_1^{(0)}$. A droite, en revanche, nous avons le facteur d'actualisation qui actualise directement en t_0 en se basant sur la courbe des taux en t_0.

Les termes de droite et de gauche coïncideraient si la courbe des taux d'intérêt était plate et constante dans le temps ($r_k^{(0)} = r_{k+1}^{(0)} = E[R_k^{(1)}] = E[R_{k+1}^{(1)}] = r$), ou si les taux à terme correspondaient à la courbe des taux au 31.12.AC. Mais en général ce n'est pas le cas.

Grâce à l'approximation posée ci-dessus, nous pouvons simplifier le risque technique et le résultat technique comme suit:

$$\left(P - F - d_{AC}^{(0)} E[S_{AC}]\right) - d_{AC}^{(0)}\left(S_{AC} - E[S_{AC}]\right) - d_{AP}^{(0)}\left(C_{AP} - 1\right) R_{AP}^{(0)} \tag{19}$$

Cette formule est essentielle dans la modélisation des risques techniques.

Pour calculer ce terme, il faut déterminer les valeurs suivantes:

- estimation des primes acquises P et des frais F;
- estimation des modèles liquidation (α_i) et (β_i) et des facteurs d'actualisation dérivés $d_{AC}^{(0)}$ et $d_{AP}^{(0)}$;
- estimation de la charge de sinistres attendue pour les sinistres AC $E[S_{AC}]$;
- distribution de probabilité de la variable aléatoire des sinistres AC S_{AC};
- distribution de probabilité du résultat de liquidation $(1 - C_{AP}) \cdot R_{AP}^{(0)}$.

Par souci d'exhaustivité, nous reprenons la formule (17a) en y incluant l'approximation (18):

$$\begin{aligned}
&\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0) \approx \\
&\approx \frac{R_I - E[R_I]}{1+r_1^{(0)}} \cdot (A(0) + (P - UPR) - F) - \left(\frac{D_{AC}^{(1)}}{1+r_1^{(0)}} - d_{AC}^{(0)}\right) \cdot E[S_{AC}] - \left(\frac{D_{AP}^{(1)}}{1+r_1^{(0)}} - d_{AP}^{(0)}\right) \cdot R_{AP}^{(0)} \\
&+ \frac{E[R_I] - r_1^{(0)}}{1+r_1^{(0)}} \cdot (A(0) + (P - UPR) - F) \\
&+ P - F - d_{AC}^{(0)} \cdot E[S_{AC}] \\
&- d_{AC}^{(0)} \cdot \left(S_{AC} - E[S_{AC}]\right) - d_{AP}^{(0)} \cdot \left(C_{AP} - 1\right) \cdot R_{AP}^{(0)}
\end{aligned} \tag{17b}$$

Il faut calculer la distribution du terme de droite afin de déterminer l'*expected shortfall*.

Il est utile de rappeler ici que la variation du capital porteur de risque induite par les risques des marchés financiers résulte de la somme des deuxième et troisième lignes de la formule (17b). La variation du capital porteur de risque induite par les variables techniques est quant à elle illustrée par les deux dernières lignes. Il serait donc tout à fait possible, pour agréger les termes de droite de (17b), de regrouper dans un premier temps la deuxième ligne avec la troisième puis la quatrième avec la cinquième, et enfin d'agréger les deux résultats.

Une deuxième possibilité consisterait à regrouper d'abord les deux lignes stochastiques (deuxième et cinquième) afin de calculer l'*expected shortfall*. L'espérance mathématique de ces deux lignes est nulle. On peut ensuite additionner les espérances mathématiques du résultat financier et du résultat technique.

Nous approfondirons au paragraphe 4.4.6 la manière de déterminer les distributions de probabilité des variables techniques aléatoires S_{AC} et $(1-C_{AP})\cdot R_{AP}^{(0)}$. Mais poursuivons d'abord avec quelques remarques concernant les hypothèses émises en (18).

4.4.4.4 Rentes LAA

Le paragraphe 3.3.1 était consacré à l'évaluation des réserves pour les rentes LAA. Nous examinons ici ce que le terme $\dfrac{CR(1)}{(1+r_1^{(0)})}-CR(0)$ signifie pour ces rentes.

Nous ne nous attarderons pas sur le cas des assureurs-accidents qui ne sont pas affiliés au fonds de renchérissement pour nous concentrer sur le cas de figure plus fréquent des assureurs affiliés.

Les réserves pour rentes se composent (ch. 3.3.1.2) de la réserve mathématique (*RM*) et des passifs envers le fonds de renchérissement (*FR*). S'y ajoutent les réserves selon OLAA 111/3 que nous ne développerons pas davantage ici:

$$L = RM + FR + OLAA_{111/3}$$

<u>Réserve mathématique</u>

La réserve mathématique est la somme des règlements futurs c_j^{LAA} au titre des rentes de base. Par mesure de simplification, le SST part de l'hypothèse que les règlements interviennent à la fin de l'année en cours, à la fin de l'année suivante, etc.

La réserve mathématique pour les rentes de base en cours en t_0 et t_1 est ainsi:

$$RM_0 = \frac{c_1^{LAA}}{1+z} + \frac{c_2^{LAA}}{(1+z)^2} + \frac{c_3^{LAA}}{(1+z)^3} + \ldots$$

et

$$RM_1 = \frac{c_2^{LAA}}{1+z} + \frac{c_3^{LAA}}{(1+z)^2} + \ldots$$

Le règlement c_1^{LAA} n'apparaît plus dans RM_1. Il s'ensuit donc immédiatement la relation suivante entre RM_0 et RM_1:

$$RM_1 = (1+z)RM_0 - c_1^{LAA}$$

La nouvelle réserve mathématique est donc l'ancienne réserve mathématique majorée du taux d'intérêt technique et minorée des règlements de l'année en cours.

Par ailleurs, nous admettons pour le moment que les règlements c_j^{LAA} au titre des rentes de base peuvent être modélisés comme des valeurs déterministes. En d'autres termes, cela signifie que nous ne considérons aucun risque biométrique.

Allocation de renchérissement

En plus de c_1^{LAA}, les bénéficiaires de rentes doivent recevoir une allocation de renchérissement (*AR*). Dans le SST, on admet que l'allocation de renchérissement est aussi versée en fin d'année.

Fonds de renchérissement

Soit FR_0 le passif envers le fonds de renchérissement en t_0 (début de l'année en cours), lequel passif augmente en cours d'année. L'augmentation se compose de la rémunération du passif existant ($\phi_{10/10} \cdot FR_0$), de l'écart de taux $(\phi_{10/10} - z)$ avec la réserve mathématique RM_0 et d'une éventuelle prime de répartition $P_{répartition}$ encaissée auprès des assurés actifs. Le taux d'intérêt $\phi_{10/10}$ a été présenté au paragraphe 3.3.1. Il y a aussi diminution du passif envers le Pool d'un montant équivalent à l'allocation de renchérissement versée aux bénéficiaires de rente. L'addition de ces deux éléments donne le passif correspondant au le fonds de renchérissement à la fin de l'année:

$$FR_1 = (1+\phi_{10/10}) \cdot FR_0 + (\phi_{10/10} - z) \cdot RM_0 + P_{répartition} - AR$$

Valeur totale des passifs

La valeur des réserves en fin d'année (sans tenir compte de OLAA 111) est donc:

$$\begin{aligned} L_1 &= RM_1 + FR_1 \\ &= (1+z)RM_0 - c_1^{LAA} + (1+\phi_{10/10}) \cdot FR_0 + (\phi_{10/10} - z) \cdot RM_0 + P_{répartition} - AR \\ &= (1+\phi_{10/10})(RM_0 + FR_0) + P_{répartition} - AR - c_1^{LAA} \\ &= (1+\phi_{10/10})L_0 + P_{répartition} - AR - c_1^{LAA} \end{aligned}$$

Actifs

La valeur des actifs en t_0 et t_1 est respectivement A_0 et

$$A_1 = (1+R) \cdot A_0 + P_{répartition} - c_1^{LAA} - AR$$

L'éventuelle prime de répartition $P_{répartition}$ est encaissée par l'assureur auprès des assurés actifs et les règlements c_1^{LAA} et *AR* sont versés par l'assureur aux bénéficiaires de rentes. $R \cdot A_0$ représente la performance des actifs investis durant l'année.

Variation du capital porteur de risque

En insérant la décomposition des actifs et des passifs dans la formule $\frac{CR(1)}{(1+r_1^{(0)})} - CR(0)$, on obtient:

$$\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0) =$$

$$= \frac{\left((1+R)\cdot A_0 + P_{répartition} - c_1^{LAA} - AR\right) - \left((1+\phi_{10/10})(RM_0 + FR_0) + P_{répartition} - AR - c_1^{LAA}\right)}{1+r_1^{(0)}} - (A_0 - (RM_0 + FR_0))$$

$$= \frac{(R - r_1^{(0)})\cdot A_0 - (\phi_{10/10} - r_1^{(0)})\cdot(RM_0 + FR_0)}{1+r_1^{(0)}}$$

On notera premièrement que les termes de la prime de répartition, de l'allocation de renchérissement et du taux d'intérêt technique n'apparaissent plus à droite. La raison tient à la conception du fonds de renchérissement, notamment au mécanisme de modification du passif des assureurs correspondant au fonds.

La dernière ligne peut être scindée en une espérance mathématique et une partie stochastique:

$$\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0) =$$

$$= \frac{(R - E[R] + E[R] - r_1^{(0)})\cdot A_0 - (\phi_{10/10} - E[\phi_{10/10}] + E[\phi_{10/10}] - r_1^{(0)})\cdot L_0}{1+r_1^{(0)}}$$

$$= \frac{1}{1+r_1^{(0)}}\cdot\left\{(E[R] - r_1^{(0)})\cdot A_0 + (R - E[R])\cdot A_0\right\}$$

$$- \frac{1}{1+r_1^{(0)}}\cdot\left\{(\phi_{10/10} - E[\phi_{10/10}])\cdot L_0\right\}$$

$$- \frac{1}{1+r_1^{(0)}}\cdot\left\{(E[\phi_{10/10}] - r_1^{(0)})\cdot L_0\right\}$$

La première ligne exprime la performance financière attendue et le risque des actifs, en fonction des facteurs de risque financier. La signification et le traitement de ces termes sont les mêmes qu'aux paragraphes 4.4.4.1, 4.4.4.2 et 4.4.4.3 ci-dessus.

La deuxième ligne exprime le risque des réserves donné par l'incertitude liée au $\phi_{10/10}$ valable pour l'année en cours, mais dont la valeur n'est connue qu'en fin d'année. Pour le test pilote 2006, cette incertitude est négligeable.

La troisième ligne est l'espérance mathématique de la variation des réserves. Sa valeur est différente de zéro si l'espérance mathématique de $\phi_{10/10}$ ne coïncide pas avec le taux d'intérêt sans risque à un an, ce qui est généralement le cas. Compte tenu du fait qu'en 2004 et 2005 les valeurs de $\phi_{10/10}$ étaient 3,37% et 3,12%, et que $r_1^{(0)}$ est actuellement proche de 1%, on ne peut faire abstraction de $(E[\phi_{10/10}] - r_1^{(0)})\cdot L_0$. On peut estimer $E[\phi_{10/10}]$ de la manière suivante: dans le calcul de la moyenne de dix taux d'intérêt, le plus ancien taux qui est d'environ 4% est remplacé par un nouveau taux d'environ 2%, ce qui conduit à une réduction de $\phi_{10/10}$ d'environ $1/_{10}\cdot 2\% = 20\,pb$. Pour le test pilote 2006, on peut donc approximer $E[\phi_{10/10}]$ par $3{,}12\% - 0{,}2\% \approx 2{,}9\%$.

Il est intéressant de s'arrêter sur le cas particulier où $A_0 = L_0$ (la valeur de marché des actifs au début est égale à la valeur des passifs au début). Dans ce cas, la formule devient:

$$\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0) = \frac{(R - r_1^{(0)}) \cdot L_0 - (\phi_{10/10} - r_1^{(0)}) \cdot L_0}{1+r_1^{(0)}}$$
$$= \frac{(R - \phi_{10/10}) \cdot L_0}{1+r_1^{(0)}}$$

Même en omettant l'incertitude de $\phi_{10/10}$, le risque de différence entre $\phi_{10/10}$ et R demeure. Même si les actifs se composent de dix tranches d'obligations à coupon zéro sans risque, à dix ans, R divergera généralement de $\phi_{10/10}$, car la performance du portefeuille obligataire dépend considérablement des fluctuations de la courbe des taux d'intérêt durant l'année, tandis que $\phi_{10/10}$ est une moyenne temporelle sur les dix dernières années. Il existe donc un risque de marché.

Globalement, les passifs se comportent comme un compte bancaire qui doit être rémunéré au taux $\phi_{10/10}$ (actuellement les presque 3% évoqués, environ). Il n'existe cependant aucun actif qui génère un tel rendement sans risque sur un an. Le portefeuille d'actifs composé de dix tranches d'obligations sans risque a par exemple réalisé une performance d'environ 2% en 2005.

En moyenne et sur une plus longue période (plusieurs années), il est certes possible que le portefeuille d'actifs composé de dix tranches d'obligations réalise la performance de $\phi_{10/10}$, mais il n'existe aucune garantie que ce soit le cas pour une année donnée.

> Pour résumer, on relèvera que dans le modèle actuel (aucun risque biométrique), les rentes LAA n'entraînent aucun risque mais sont associées à une perte attendue $(E[\phi_{10/10}] - r_1^{(0)}) \cdot L_0$. Les risques des actifs se mesurent, comme dans tout le SST, à l'écart entre la performance R et l'espérance mathématique de la performance $E[R]$.

4.4.4.5 Remarques concernant l'hypothèse (18) relative à la courbe attendue des taux d'intérêt

L'hypothèse (18) établit une égalité entre

- la valeur actualisée en t_0 d'un règlement futur et
- son espérance mathématique actualisée en t_1, après qu'elle a été actualisée en t_0.

L'espérance mathématique est nécessaire car l'actualisation en t_1 se fait avec la courbe des taux à cet instant, or cette courbe est encore inconnue en t_0.

L'hypothèse (18) postule donc l'espérance mathématique d'un facteur d'actualisation futur et par là l'espérance mathématique des taux d'intérêt futurs $R_i^{(1)}$:

$$E[\frac{1}{(1+R_i^{(1)})^i}] = \frac{1}{(1+r_1^{(0)}) \cdot (1+r_{j-1}^{(0)})^{j-1}}.$$

Par cette simplification, les réserves pour sinistres actualisées ne contribuent en aucune manière au résultat technique, ce qui n'est pas clair de prime abord. Les réserves non actualisées sont estimées à l'aide de leur espérance mathématique, autrement dit l'espérance mathématique des réserves dans un an est égale aux réserves actuelles. Dans la formule introduite précédemment, cela signifie que $E[C_{AP}]=1$. L'hypothèse (18) est donc nécessaire pour que les réserves actualisées conduisent à une espérance mathématique nulle du résultat technique.

Si des hypothèses sont émises pour les taux d'intérêts futurs, les mêmes hypothèses doivent être retenues pour les placements, avec des conséquences symétriques sur l'espérance mathématique du résultat financier.

Considérons par exemple une obligation à coupon zéro sans risque qui sera remboursée à la valeur a dans dix ans. Sa valeur actuelle est

$$A(0)=\frac{a}{(1+r_{10}^{(0)})^{10}}$$

Sa valeur dans un an sera

$$A(1)=\frac{a}{(1+R_{9}^{(1)})^{9}}$$

Définissons-en maintenant l'espérance mathématique afin de déterminer la performance attendue à un an, en y intégrant l'hypothèse émise précédemment pour les taux d'intérêt futurs:

$$\frac{E[A(1)]}{A(0)}=\frac{E\left[\frac{1}{(1+R_{9}^{(1)})^{9}}\right]}{\frac{1}{(1+r_{10}^{(0)})^{10}}}=1+r_{1}^{(0)}$$

Le résultat est une performance attendue de ce placement à hauteur du taux d'intérêt sans risque à un an.

Cette démarche n'est pas conforme au marché, car ce placement est soumis à un risque de taux lorsqu'il est détenu pendant une période d'un an, même si son remboursement doit intervenir avec certitude dans dix ans. Un marché fuyant le risque exigera donc une performance supérieure à celle calculée ici.

Il faut donc en conclure que l'hypothèse émise au sujet des taux d'intérêt (18) est problématique sur un marché qui a de l'aversion pour le risque. Le modèle standard conserve pourtant cette hypothèse, car elle permet de simplifier l'estimation des passifs. Toute autre hypothèse sur les taux d'intérêt futurs conduit à un résultat de liquidation actualisé différent de zéro. Comme les hypothèses sur les taux sont valables tant pour les passifs que pour les actifs, dans le modèle standard la performance attendue d'une obligation de la Confédération est égale au taux d'intérêt sans risque à un an.

Il est permis de déroger à l'hypothèse (18) et d'adopter une autre hypothèse pour l'espérance mathématique des taux d'intérêt futurs, pour autant que cette hypothèse s'applique de la même manière aux actifs et aux passifs.

Si l’on prend pour hypothèse une obligation de la Confédération à long terme dont la performance est supérieure au taux d’intérêt sans risque à un an, cela entraîne une perte attendue sur les passifs actualisés. Dans un portefeuille présentant une structure d’échéances identique pour les actifs et les passifs, les deux effets s’annulent exactement.

4.4.5 Espérance mathématique du résultat

Dans la formule (17b) la partie de droite comporte quatre termes. Le deuxième et le troisième termes, qui ont chacun une espérance mathématique de zéro, décrivent le risque de marché et le risque technique. La variation attendue du capital porteur de risque s’exprime donc à travers les premier et quatrième termes qui représentent les espérances mathématiques du résultat technique et du résultat financier.

> La remarque formulée au paragraphe 4.4.4.5 ci-dessus reste entièrement valable: les hypothèses concernant la courbe future des taux d’intérêt doivent être identiques pour les actifs et les passifs.

4.4.5.1 Espérance mathématique du résultat technique

L’espérance mathématique du résultat technique se compose de l’espérance mathématique des primes acquises, sous déduction des espérances mathématiques actualisées des nouveaux sinistres et des frais (17b). Si l’on retient l’hypothèse (18), et tel est le cas dans le modèle standard, les réserves pour les sinistres AP ne contribuent pas à l’espérance mathématique du résultat technique.

Les rentes LAA font exception. Comme nous l’avons vu au paragraphe 4.4.4.4, les rentes LAA entraînent une perte technique dont l’espérance mathématique prévue est $(E[\phi_{10/10}] - r_1^{(0)}) \cdot L_0$.

4.4.5.2 Espérance mathématique du résultat financier

L’espérance mathématique du résultat financier est égale à la performance des actifs, sous déduction du taux d’intérêt sans risque à un an. La raison pour laquelle le taux sans risque est déduit réside dans la définition même du capital cible (2b) respectivement (4). Cela correspond au fait que le capital cible nécessaire pour la détention d’un portefeuille composé d’exactement une obligation de la Confédération à un an est égal à zéro.

Si, comme c’est le cas dans le modèle standard, l’hypothèse (18) est retenue, la performance des obligations sans risque coïncide exactement avec le taux d’intérêt sans risque à un an. Par conséquent, ces obligations ne génèrent pas une performance supérieure au taux d’intérêt sans risque à un an.

4.4.6 Détermination de la distribution du résultat technique des sinistres AC

Nous décrivons ici comment la charge de sinistres S_{AC} est modélisée dans le modèle standard. On notera qu’aux fins d’agrégation dans la formule (17b), il faut établir une différence entre la variable S_{AC} et son espérance mathématique $E[S_{AC}]$.

Pour modéliser la charge annuelle de sinistres S_{AC}, on fait une distinction entre les petits sinistres *PS* et les grands sinistres *GS*, car il n’existe aucune distribution de probabilité décrivant judicieusement les deux catégories. Dans le SST, la limite entre petits et grands sinistres (seuil des grands sinistres β) peut être fixée au choix à 1 ou 5 millions de CHF.

Par grands sinistres on entend aussi bien les grands sinistres individuels (par branche) que les dommages cumulatifs, qui sont consécutifs, par exemple, à des événements naturels tels que la grêle ou des crues. Les dommages cumulatifs peuvent toucher plusieurs branches d’assurance. Un orage de grêle, par exemple, concerne surtout l’assurance choses, mais aussi l’assurance casco des véhicules à moteur.

On recherche donc une distribution de la charge de sinistres globale qui soit une somme des charges des petits et des grands sinistres:

$$S_{AC} = S_{AC}^{PS} + S_{AC}^{GS} \tag{20}$$

Il faut déterminer deux distributions de la charge de sinistres, l'une pour les petits sinistres et l'autre pour les grands sinistres. Dans le SST on admet qu'il n'y a aucune relation entre les grands et les petits sinistres. Cela signifie que l'agrégation des deux types de sinistres dans S_{AC} s'obtient par le produit de convolution des deux distributions.

4.4.7 Sinistres AC: distribution des petits sinistres

A une exception près, la répartition des petits sinistres AC par branches se fait conformément à la liste de l'annexe 8.4.1. L'exception concerne les petits sinistres qui relèvent du Pool Dommages naturels, car ceux-ci font partie intégrante du modèle spécifique du Pool dn (ch. 4.4.9).

La charge annuelle des petits sinistres résulte des sinistres individuels des branches. Le SST ne retient aucune hypothèse explicite au sujet de la distribution des sinistres individuels et représente simplement la charge annuelle de sinistres par l'espérance mathématique et la variance.

Nous décrivons ci-dessous comment calculer (globalement pour toutes les branches) l'espérance mathématique et la variance pour l'ensemble des petits sinistres.

4.4.7.1 Espérance mathématique

L'espérance mathématique de la charge globale des petits sinistres S_{AC}^{PS} résulte de la sommation des espérances mathématiques de chaque branche *i*:

$$E(S_{AC}^{PS}) = \sum_{i=1}^{12} E(S_{AC,i}^{PS}) \tag{21}$$

L'espérance mathématique de la charge de sinistres par branche $E(S_{AC,i}^{PS})$ peut par exemple être estimée à l'aide du produit des espérances mathématiques du taux de sinistres et des primes acquises.

$$E(S_{AC,i}^{PS}) = LR_i \cdot P_i, \ (i = 1,2,...,12) \tag{22}$$

4.4.7.2 Variance

Nous expliquons ici la variance de la charge globale des petits sinistres à partir des variances et des covariances des charges de sinistres des branches. Ensuite, nous montrerons aussi comment déterminer la variance de chaque branche.

La variance de la charge globale des petits sinistres résulte de la sommation des variances et des covariances de toutes les branches:

$$\begin{aligned} Var(S_{AC}^{PS}) &= \sum_{i=1}^{12} Var(S_{AC,i}^{PS}) + \sum_{i,j=1\, et\, i\neq j}^{12} Cov(S_{AC,i}^{PS}, S_{AC,j}^{PS}) \\ &= \sum_{i=1}^{12} (CV_i \cdot E(S_{AC,i}^{PS}))^2 + \sum_{i,j=1\, et\, i\neq j}^{12} \rho_{i,j} \cdot (CV_i \cdot E(S_{AC,i}^{PS})) \cdot (CV_j \cdot E(S_{AC,j}^{PS})) \end{aligned} \tag{23}$$

où CV_i est le coefficient de variation de la branche *i* défini par

$$CV_i = \frac{\sigma(S^{PS}_{AC,i})}{E(S^{PS}_{AC,i})} \tag{24}$$

et où $\sigma(S^{PS}_{AC,i})$ est l'écart-type de la charge des petits sinistres $S^{PS}_{AC,i}$ dans la branche *i* et $\rho_{i,j}$ le coefficient de corrélation pour les branches *i* et *j*. La matrice de corrélation validée pour le modèle standard figure à l'annexe 8.4.2.

4.4.7.3 Coefficients de variation

La variance de la charge annuelle de sinistres est influencée par deux côtés. D'une part, il existe des fluctuations statistiques du nombre et du montant des sinistres autour de l'espérance mathématique. Ce facteur d'incertitude est le risque aléatoire ou risque de processus.
Une incertitude frappe d'autre part les paramètres de la distribution, en d'autres termes l'espérance mathématique et la variance. Ces dernières sont en effet inconnues et doivent être estimées sur la base de statistiques et de connaissances spécialisées, ce qui est une source d'incertitude. Le risque qui désigne cette incertitude est le risque paramétrique. Comme exemples de risques paramétriques, on peut citer l'estimation erronée du renchérissement dans l'assurance-maladie, une mauvaise projection des fréquences de sinistres, des modifications extérieures, etc. La formule suivante exprime plus précisément la variance totale de la charge de sinistres dans une branche *i*:

$$Var(S^{i}_{AC,i}) = Var(E[S^{PS}_{AC,i}|\Theta_i]) + E[Var(S^{PS}_{AC,i}|\Theta_i)] \tag{25}$$

Le premier terme représente le risque paramétrique, autrement dit la variabilité des paramètres du modèle d'une année à l'autre, sous l'influence de facteurs externes. L'ensemble de ces facteurs est caractérisé par la variable aléatoire Θ (paramètre de risque). Cette dernière peut être considéré comme caractéristique du risque pour les sinistres d'une année donnée. Elle mesure la précision avec laquelle un actuaire peut estimer l'espérance mathématique de la charge de sinistres, soit les facteurs d'influence externes qui ne peuvent pas être couverts par la compensation des risques au sein du collectif des assurés (la taille de l'entreprise ne joue ici aucun rôle, ce qui signifie que ce risque ne peut pas être atténué par effet de diversification).

Le second terme de la somme est le risque aléatoire qui découle de l'incertitude sur le montant annuel des sinistres pour un paramètre de risque Θ_i donné (c'est-à-dire la donnée de l'espérance mathématique et de la variance de la distribution).

Si l'on admet que pour un Θ_i donné, le nombre de sinistres de la branche *i* est distribué selon la loi de Poisson avec le paramètre de Poison λ_i (espérance mathématique du nombre de sinistres), on obtient pour les coefficients de variation de $S^{PS}_{AC,i}$ (dérivation cf. annexe 8.4.5)

$$CV_i^2 = \frac{Var(S^{PS}_{AC,i})}{(E[S^{PS}_{AC,i}])^2} = CV_{p,i}{}^2 + \frac{1}{\lambda_i}(CV^2(Y_{i,j})+1), \tag{26}$$

où $CV(Y_{i,j})$ désigne le coefficient de variation du montant par sinistre dans la branche *i*. Le premier terme de la somme $CV_{p,i}$ reflète la contribution du risque paramétrique et le second terme celle du risque aléatoire. Nous allons maintenant examiner ces deux risques plus en détail.

4.4.7.4 Risque paramétrique

Le coefficient de variation du risque paramétrique de la branche *i* ($CV_{p,i}$) se compose de deux incertitudes paramétriques, l'une relative à l'espérance mathématique du montant par sinistre ($E[Y_{i,j}]$) et l'autre à l'espérance mathématique du nombre de sinistres individuels ($E[N_i]$). Ces incertitudes sont influencées par des facteurs externes qui frappent toutes les entreprises de la même manière, si ce n'est entièrement du moins en bonne partie. C'est pourquoi des valeurs standard ont pu être établies pour les coefficients de variation des risques paramétriques de chaque branche, sur la base des statistiques communes des assureurs. Ces valeurs standard sont récapitulées à l'annexe 8.4.3.

4.4.7.5 Risque aléatoire

La variabilité du *j*-ième montant individuel de sinistre de la branche *i*, donné par $Y_{i,j}$, est représentée par $CV(Y_{i,j})$. Le facteur 1 introduit dans la parenthèse provient de la variabilité du nombre de sinistres (pour un Θ donné, celle-ci est distribuée selon la loi de Poisson avec l'espérance mathématique λ_i). Dans le cadre du SST non-vie, des valeurs standard des coefficients de variation du montant par sinistre sont disponibles pour chaque branche. Des valeurs numériques pour les $CV(Y_{i,j})$ sont fournies à l'annexe 8.4.4.

Lorsqu'on utilise les valeurs standard pour $CV_{p,i}$ et $CV(Y_{i,j})$, la formule (26) a la propriété de permettre le calcul des variances (et des coefficients de variation) sans qu'il faille déterminer l'espérance mathématique du nombre de sinistres par branche. On obtient la variance de la distribution des petits sinistres [cf. (23) et (26)] par l'agrégation des branches décrite précédemment.

4.4.8 Sinistres AC: distribution des grands sinistres

Comme nous l'avons déjà évoqué, la catégorie des grands sinistres inclut les grands sinistres individuels ainsi que les dommages cumulatifs, conformément aux définitions suivantes.

- Grand sinistre individuel: un dommage dont le montant est très élevé. De tels sinistres touchent les branches Choses (par ex. incendie d'une fabrique) et RC (par ex. responsabilité du fait des produits ou RC des véhicules à moteur). A priori, le montant d'un sinistre individuel est indépendant de la taille de l'entreprise d'assurance.

- Dommage cumulatif: une accumulation de sinistres qui sont tous consécutifs au même événement (par ex. grêle ou tempête). En règle générale, les sinistres pris individuellement ne sont pas des grands sinistres, mais leur charge globale peut être très élevée en raison de leur grand nombre. Même si chaque sinistre pris pour soi n'est pas plus important qu'un petit sinistre, l'ensemble ne peut pas être représenté correctement dans le modèle des petits sinistres en raison des interdépendances (cumul).

Le modèle SST pour les grands sinistres s'applique aux types d'événements et branches suivants:

Branche (ou type d'événement)	Remarque concernant la modélisation des grands sinistres
RC véhicules à moteur	modélisé comme grand sinistre individuel
Casco véhicules à moteur	inclut les dommages dus à la grêle; modélisé en fonction de la part de marché dans le dommage global
Choses, dommages naturels exclus	modélisé comme grand sinistre individuel; dommages naturels exclus, ceux-ci étant modélisés séparément
RC générale	modélisé comme grand sinistre individuel
Maladie collective	modélisé comme grand sinistre individuel
Maladie individuelle	modélisé comme grand sinistre individuel
Aviation	aucun modèle pour les grands sinistres, le Pool Aviation étant fortement réassuré
Transport	modélisé comme grand sinistre individuel
Financement et cautionnement	modélisé comme grand sinistre individuel

Accidents (LAA et non-LAA)	modélisé en fonction de la part de marché dans un dommage cumulatif touchant tout le marché (par ex. panique dans un stade de football) (=cumul inconnu); Un dommage cumulatif qui ne toucherait qu'un seul assureur n'est pas modélisé directement comme grand sinistre. Il est cependant pris en considération à l'aide d'un scénario (= cumul connu).
Pool Dommages naturels	modélisé en fonction de la part dans un dommage global, à hauteur de la participation au Pool dn
Autres dommages naturels	modélisé en fonction de la part aux pertes d'exploitation, ou d'une autre grandeur appropriée, dans le dommage global; le dommage global est modélisé comme une grandeur comonotone des grands sinistres du Pool Dommages naturels

Modélisation des grands sinistres par branche ou par type d'événement.

Les entreprises d'assurances sont souvent impliquées dans les dommages cumulatifs à hauteur de leur part de marché dans la branche concernée. De ce fait, il est judicieux de fixer des paramètres communs.

Les grands sinistres sont modélisés séparément pour chaque branche ou type d'événement *i* au moyen d'une distribution de Poisson composée:

$$S_{AC,i}^{GS} = \sum_{j=1}^{N^{GS}{}_i} Y_{i,j}^{GS} \tag{27}$$

Le nombre de sinistres N_i^{GS} de la branche i est distribué selon la loi de Poisson pour l'espérance mathématique λ_i^{GS}. On admet qu'au sein de la branche ou du type i, la distribution est identique pour tous les sinistres bruts $Y_{i,j}^{GS}$ pris individuellement. Pour cette distribution, on établit une distribution de Pareto par type i :

$$F_{Y_{i,j}^{GS}}(y) = P(Y_{i,j}^{GS} \le y) = \begin{cases} 0 & y < \beta \\ 1 - \left(\dfrac{y}{\beta}\right)^{-\alpha_i} & y \ge \beta \end{cases} \tag{28}$$

β représente le plus petit dommage pris en considération dans le modèle des grands sinistres. C'est pourquoi il est souvent appelé «seuil des grands sinistres» ou *threshold*. On peut également l'appeler «point d'observation de la distribution de Pareto». Les valeurs standard des paramètres du SST ont été fixées de sorte que β soit égal à 1 ou 5 millions de CHF. Chaque entreprise d'assurance doit choisir l'une de ces valeurs pour chacune de ses branches. La notation β utilisée dans le présent document ne reflète cependant pas cette possibilité de choix.

L'une des propriétés des distributions de Pareto est qu'elles donnent plus d'importance aux sinistres de grande ampleur que de nombreuses autres distributions. Cette pondération est définie par les paramètres de Pareto α_i. Plus la valeur de α_i est petite, plus la pondération des grands sinistres de grande ampleur est élevée.

Les valeurs standard données pour les paramètres de Pareto sont les suivantes:

Branche	pour β = 1 mio. de CHF	pour β = 5 mio. de CHF
RC véhicules à moteur	2,50	2,80
Casco véhicules à moteur - Grêle	1,85	1,85
Choses	1,40	1,50
RC	1,80	2,00
LAA, y c. LAA compl.	2,00	2,00
Maladie collective	3,00	3,00
Maladie individuelle	3,00	3,00
Transports	1,50	1,50
Financement et cautionnement	0,75	0,75
Autres	1,50	1,50

Paramètres α_i de la distribution de Pareto.

En recourant à la distribution de Pareto pour modéliser le montant par grand sinistre, les montants de sinistre peuvent être illimités. Mais en réalité, dans certaines branches le montant des sinistres ne peut atteindre n'importe quelle somme, par exemple à cause de la somme d'assurance maximale fixée dans la police. Pour cette raison, il est judicieux de tronquer les distributions de Pareto à partir de certaines valeurs. A cette fin, des limites d'inclusion standardisés ont été définis pour certaines branches.

Ces valeurs standard sont reproduites dans le tableau ci-dessous. Elles ne sont pas obligatoires, mais toute dérogation doit être justifiée.

Branche	Limite d'inclusion
RC véhicules à moteur	illimité
Casco véhicules à moteur	part de marché x 1,5 mrd de CHF
Choses	estimation individuelle du plus grand dommage possible par EA
RC	estimation individuelle du plus grand dommage possible par EA
LAA y c. LAA compl.	illimité
Accidents sans LAA	50 mio. de CHF
Maladie collective	estimation individuelle du plus grand dommage possible par EA
Maladie individuelle	estimation individuelle du plus grand dommage possible par EA
Transport	2 × la plus grande somme d'assurance possible
Financement + cautionnement	estimation individuelle du plus grand dommage possible par EA
Autres	estimation individuelle du plus grand dommage possible par EA
Dommages naturels dans le Pool dn	500 mio. de CHF, soit le montant contractuel prévu par événement pour le dommage global
Dommages naturels hors Pool dn	part de marché × 1 mrd de CHF

Limites d'inclusion de la distribution de Pareto.
Les dommages naturels seront traités au paragraphe 4.4.9 et ne figurent ici que par souci d'exhaustivité.

Maintenant, nous allons examiner de façon plus détaillée les modèles concernant les dommages cumulatifs consécutifs à la grêle, aux accidents et aux dommages naturels. Ces sinistres ont la particularité de ne pas toucher une seule entreprise d'assurances mais tous les assureurs en même temps, c'est pourquoi ce type de dommages doit être modélisé de manière globale, pour l'ensemble du marché, puis être multiplié par la part de marché de chaque assureur afin de réduire l'ampleur du sinistre à la mesure de chaque entreprise d'assurances.

4.4.8.1 Modélisation des dommages cumulatifs consécutifs à la grêle

La modélisation d'un dommage cumulatif consécutif à un orage de grêle concerne surtout la branche Casco des véhicules à moteurs. Comme dans les autres branches, les grands sinistres causés par la grêle sont représentés par une distribution de Poisson et une distribution de Pareto.

On fixe d'abord le seuil des grands sinistres causés par la grêle ($\beta_{grêle}^{(marché;0)}$) à 45 mio. de CHF pour l'ensemble du marché. Une estimation menée sur la base d'une riche statistique concernant ce type de dommages a débouché sur les paramètre suivants: l'espérance mathématique du nombre des sinistres dont le montant global dépasse 45 mio. de CHF ($\lambda_{grêle}^{(0)}$) est 0,9. Le paramètre de Pareto $\alpha_{grêle}$ est quant à lui de 1,85.

Pour établir le modèle, il faut cependant définir un seuil individuel des grands sinistres pour chaque entreprise. Celui-ci dépend du seuil des grands sinistres β choisi par l'entreprise et de sa part de marché dans les dommages causés par la grêle $m_{grêle}$ (qui est équivalente à la part de marché dans la branche Casco des véhicules à moteur).
Exemple: soit le seuil des grands sinistres β fixé à 1 mio. de CHF et la part de marché m à 10%, les dommages globaux du marché supérieurs à

$$\beta_{grêle}^{(marché)} = \frac{\beta}{m_{grêle}} = \frac{1}{0,1} MCHF = 10 MCHF \tag{29}$$

doivent se substituer à $\beta_{grêle}^{(0)}$ dans les calculs.

Le nombre attendu de sinistres dépassant le seuil individuel

$$\lambda_{grêle} = \lambda_{grêle}^{(0)} \cdot \left(\frac{\beta_{grêle}^{(marché)}}{\beta_{grêle}^{(marché;0)}} \right)^{-\alpha} \tag{30}$$

s'obtient par la distribution de Pareto. Il s'ensuit que l'espérance mathématique à utiliser dans l'exemple ci-dessus est

$$\lambda_{grêle} = 0,9 \cdot \left(\frac{10}{45} \right)^{-1,85} = 14,5 \tag{31}$$

Remarque: en fait, il est faux d'extrapoler les sinistres de 10 mio. de CHF à l'aide de la distribution de Pareto de 45 mio. de CHF, car dans le bas de la fourchette la distribution de Pareto n'est plus valable. Autrement dit, il serait faux aussi d'admettre que 14,5 est l'espérance mathématique du nombre de dommages causés par la grêle dont le montant est supérieur à 10 mio. de CHF. Dans la réalité, ce nombre est plus faible. On peut toutefois s'accommoder de cette erreur dans le modèle des grands sinistres, car seul nous intéresse ici le comportement dans la queue de la distribution, c'est-à-dire pour les sinistres les plus grands. Et s'agissant du comportement dans la queue de la distribution, l'approximation est valable.

La distribution de Pareto de la charge des sinistres causés par la grêle pour un grand sinistre peut être tronquée à 1,5 mrd de CHF. On a alors dans l'exemple précédent:

$$F_{Y^{GS}_{grêle,j}}(y) = \begin{cases} 0 & y < 10MCHF \\ 1-\left(\dfrac{y}{10MCHF}\right)^{-1,85} & 10MCHF \le y \le 1500MCHF \\ 1 & 1500MCHF < y \end{cases} \tag{32}$$

4.4.8.2 Modélisation des dommages cumulatifs dans l'assurance-accidents (cumul inconnu)

Comme pour les sinistres causés par la grêle, les dommages cumulatifs consécutifs aux accidents sont modélisés comme une part de marché $m_{accident}$ dans un dommage cumulatif touchant l'ensemble du marché.

La distribution des sinistres touchant l'ensemble du marché est une distribution de Poisson composée, dont le seuil $\beta^{(marché;0)}_{accident}$ est de 20 mio. de CHF. La probabilité $\lambda^{(0)}_{accident}$ qu'un dommage cumulatif touchant les assureurs privés (Suva exclue) atteigne ou dépasse $\beta_{accident}$ durant une année a été estimée à 0,1. Le paramètre de Pareto $\alpha_{accident}$ est 2.

Comme nous l'avons vu lors de l'examen des dommages cumulatifs causés par la grêle, il faut adapter le plus petit sinistre global $\beta^{(marché)}_{accident}$ pris en considération et l'espérance mathématique de la fréquence $\lambda_{accident}$, afin que ces paramètres soient cohérents avec le seuil de grands sinistres choisi par l'entreprise et avec sa part de marché.

$$\beta^{(marché)}_{accident} = \frac{\beta}{m_{accident}} \tag{33}$$

$$\lambda_{accident} = \lambda^{(0)}_{accident} \cdot \left(\frac{\beta^{(marché)}_{accident}}{\beta^{(marché;0)}_{accident}}\right)^{-\alpha_{accident}} \tag{34}$$

Il est proposé de mesurer la part de marché à l'aide des primes acquises avant réassurance.

4.4.8.3 Agrégation des distributions de grands sinistres

Nous allons maintenant expliquer comment agréger de manière simple et pratique les distributions de grands sinistres évoquées jusqu'ici (distributions de Poisson composées, par branche). Cette réflexion repose premièrement sur le fait que la somme de variables indépendantes distribuées selon une loi de Poisson composée est elle-même distribuée selon une loi de Poisson composée. Deuxièmement, une distribution de Poisson composée chiffrée peut être obtenue facilement avec l'algorithme de Panjer.

Rappelons tout d'abord que la distribution des grands sinistres par branche ou type d'événement est donnée par la somme stochastique des charges brutes des sinistres individuels $Y^{GS,brut}_{i,j}$

$$S^{GS,brut}_{AC,i} = \sum_{j=1}^{N^{GS}_i} Y^{GS,brut}_{i,j} \tag{35}$$

L'indice *i* représente l'une des branches de grands sinistres individuels ainsi que les dommages cumulatifs consécutifs à la grêle et aux accidents. Les sinistres du Pool Dommages naturels ne sont pas encore pris en considération dans cette agrégation.

La distribution du nombre de sinistres par branche ou type d'événement *i* est une distribution de Poisson:

$$N_i^{GS} \sim Poisson(\lambda_i^{GS}) \tag{36}$$

La distribution de la charge de sinistres brute par branche ou type d'événement est

$$Y_{i,j}^{GS,brut} \sim Pareto(\alpha_i, \beta) \tag{37}$$

ou, si l'on choisit un seuil de grands sinistres différent pour chaque branche,

$$Y_{i,j}^{GS,brut} \sim Pareto(\alpha_i, \beta_i) \tag{38}$$

La distribution de la charge de sinistres nette par sinistre est obtenue par l'application des couvertures en excédent de sinistre (*excess of loss* ou XL) à la distribution de Pareto. Le résultat est décrit formellement par

$$Y_{i,j}^{GS,net} \sim F_{Y_{i,j}^{GS,net}} \tag{39}$$

La somme des charges annuelles de sinistres (nette et brute) pour toutes les branches et tous les types d'événements

$$S_{AC}^{GS} = \sum_i S_{AC,i}^{GS} = \sum_i \sum_{j=1}^{N_i^{GS}} Y_{i,j}^{GS} \tag{40}$$

est de nouveau une distribution de Poisson composée (dans ce cas sans dérivation). Cela signifie que S_{AC}^{GS} peut être décrit comme

$$S_{AC}^{GS} = \sum_{k=1}^{N^{GS}} Y_K \tag{41}$$

La distribution du nombre de sinistres est

$$N^{GS} \sim Poisson\left(\sum_i \lambda_i^{GS}\right) \tag{42}$$

La distribution des sinistres individuels Y_k est une moyenne pondérée des fonctions de distribution des sinistres individuels de chaque branche ou type d'événement:

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \cdot \sum_i \left(\lambda_i \cdot F_{Y_{AC,i}^{GS}}(y)\right) \tag{43}$$

La distribution globale des grands sinistres *S* peut maintenant être calculée à l'aide de la transformation rapide de Fourier ou de préférence avec l'algorithme de Panjer.

La distribution des dommages naturels ne peut pas encore être agrégée avec celles des grands sinistres, car le Pool Dommages naturels dispose d'une couverture en excédent de pourcentage de sinistres (*stop loss* ou XS). De ce fait, la distribution de la charge annuelle de sinistres nette, pour les dommages naturels, n'est pas une distribution de Poisson composée. Il n'est donc pas possible de l'agréger avec celles des autres grands sinistres selon la méthode décrite ci-dessus. Elle doit d'abord être réduite à S_{AC}^{GS}.

4.4.9 Modélisation des dommages naturels

Les dommages naturels doivent être modélisés séparément des autres sinistres, petits et grands, à cause de la couverture *stop loss* du Pool Dommages naturels (Pdn). Sans cette couverture, les dommages naturels pourraient être traités comme les autres grands sinistres et être agrégés avec eux.

La notion de dommages naturels recouvre tous les dommages matériels causés par les forces de la nature. Il s'agit en premier lieu des petits et des grands sinistres couverts par le Pdn, à savoir les dommages aux bâtiments (dans les cantons GUSTAVO[E]) et des dommages aux biens mobiliers et au contenu des bâtiments.

Les forces de la nature provoquent aussi des dommages qui concernent d'autre branches, par exemple la perte d'exploitation (Pex). Dans le présent document, ce type de dommages sera regroupé sous la désignation «autres dommages naturels». Étant donné que les autres dommages naturels sont liés aux sinistres Pdn, ils sont modélisés avec eux.

Nous allons maintenant expliciter le modèle Pdn et ensuite celui des autres dommages naturels.

4.4.9.1 Modèle du Pool Dommages naturels

Le modèle Pdn repose sur les hypothèses suivantes, retenues aux fins de simplification:

- Les assureurs des bâtiments et des biens mobiliers sont membres du Pdn. Les assureurs participent aux sinistres Pdn individuellement, à hauteur de leur part de marché dans l'assurance incendie.
- Le Pdn redistribue les dommages à concurrence de 100% et non de 85% seulement.
- Le secteur de l'assurance ne paie pas plus de 500 mio. de CHF par événement (limite par événement de 250 mio. de CHF pour les bâtiments et de 250 mio. pour le contenu. Cette limite pourrait être augmentée, mais cette nouveauté n'est pas encore en vigueur). Mais en cas de sinistre majeur, les entreprises d'assurances peuvent verser une contribution supérieure à cette limite pour sauver leur réputation. C'est d'ailleurs ce qu'elles ont fait lors des intempéries de l'été 2005. L'autorité de surveillance ne veut cependant pas exiger un capital cible à cette fin, car ce versement supplémentaire ne fait l'objet d'aucune obligation légale.
- Le Pdn a une couverture annuelle en excédent de pourcentage de sinistres (*stop loss*).
- Les sinistres Pdn sont subdivisés en grands sinistres et en petits sinistres, les premiers étant définis comme les dommages naturels dont le montant totalise 50 mio. de CHF ou plus.

Toutes les entreprises qui assurent les dommages naturels sont touchées par les sinistres Pdn à raison d'un certain pourcentage. C'est pourquoi, dans un premier temps, il convient de modéliser le sinistre qui touche l'ensemble du marché, ou sinistre global. La distribution qui en résultera pourra ensuite être subdivisée en fonction de la part de marché de chacun.

<u>Grands sinistres</u>

Le modèle de la charge annuelle des grands sinistres Pdn

$$S_{Pdn}^{GS} = \sum_{j}^{N} \min(500, Y_j) \qquad (44)$$

est une distribution de Poisson composée dans laquelle la charge individuelle des grands sinistres Y_j est distribuée selon une loi de Pareto généralisée tronquée à 500 mio. de CHF.

[E] <u>G</u>enève, <u>U</u>ri, <u>S</u>chwyz, <u>T</u>essin, <u>A</u>ppenzell Rhodes-Intérieures, <u>V</u>alais et <u>O</u>bwald

La fonction de distribution cumulée de la distribution de Pareto généralisée a la forme suivante:

$$F(x)=\begin{cases} 1-\left(\dfrac{x_0+b}{x+b}\right)^{\alpha} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

A l'instar de la distribution de Pareto, $1-F(x)$ se comporte comme $\sim x^{-\alpha}$ pour $x >> x_0 + b$.

L'Association Suisse d'Assurances (ASA) a analysé les données du Pdn pour $x_0 = 50$ mio. de CHF. Elle a obtenu les paramètres $\alpha = 1{,}2499$ et $b = 18{,}7761$ mio. de CHF pour la charge individuelle des grands sinistres et l'espérance $E[N] = \lambda = 15/22 = 0{,}68687$ pour le nombre annuel des grands sinistres d'un montant supérieur ou égal à 50 mio. de CHF (15 événements dont le montant corrigé de l'inflation était supérieur à 50 mio. de CHF sur 22 ans).

Petits sinistres

La charge annuelle des petits sinistres Pdn S_{Pdn}^{PS} s'ajoute à celle des grands sinistres. Pour cette variable, l'analyse de l'ASA se base sur une distribution lognormale dont les moments sont $E[S_{Pdn}^{PS}] = 97{,}48$ mio. de CHF et $\sqrt{Var(S_{Pdn}^{PS})} = 0{,}3072 \cdot E[S_{Pdn}^{PS}]$. Il est même admis de ramener la variance de S_{Pdn}^{PS} à zéro pour l'estimation du risque, car le risque du Pdn est dominé par les grands sinistres (cf. Figure 7).

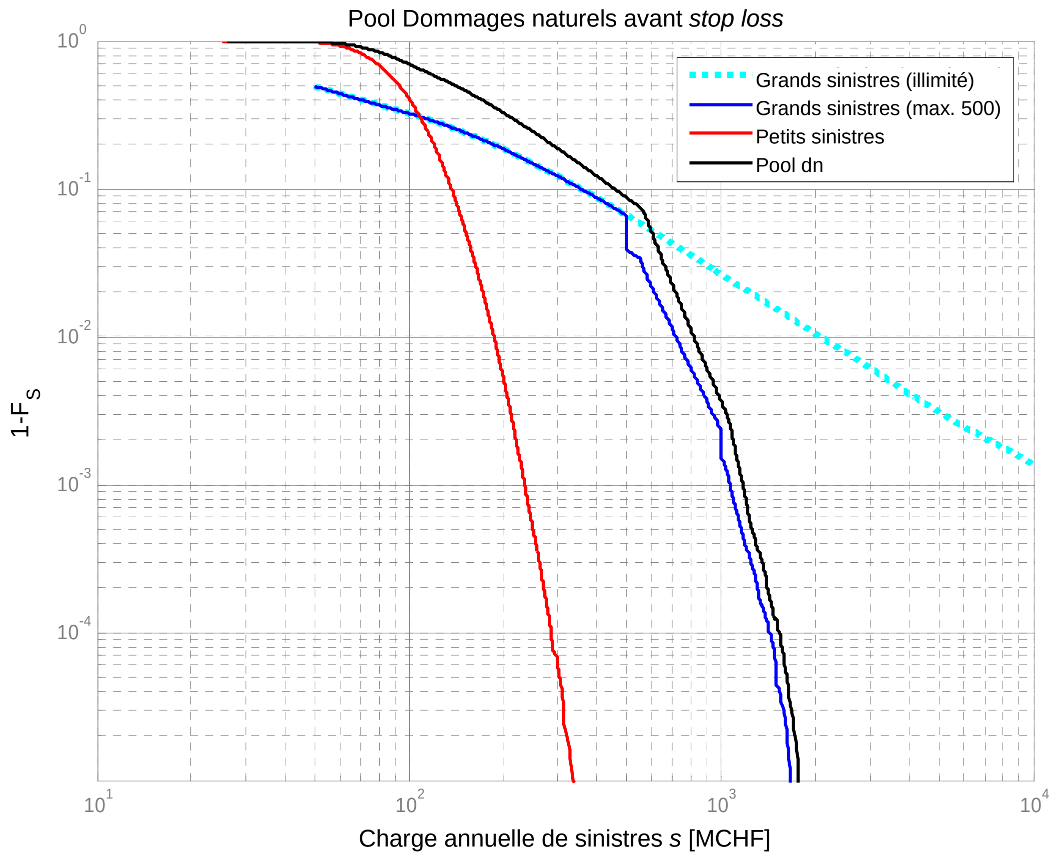


Figure 6: Probabilités de dépassement des charges annuelles de sinistres du Pool Dommages naturels avant la couverture *stop loss*. La courbe rouge représente les petits sinistres, la courbe bleue les grands sinistres compte tenu de la limite de 500 mio. de CHF par événement et la courbe noire la somme des deux. La courbe pointillée bleu ciel représente la distribution des grands sinistres sans limite de couverture. L'*expected shortfall* des trois premières catégories est de 208, 880 et 982 mio. de CHF respectivement.

Somme des charges de sinistres des grands et des petits sinistres, couverture *stop loss*

La couverture annuelle *stop loss* du Pdn (750 xs 450 mio. de CHF) influe sur la somme des charges de sinistres des grands et des petits sinistres. La charge annuelle de sinistres qui reste entièrement à la charge du Pdn est en effet

$$S_{Pdn} = \mathbf{SL}_{750xs450}\{S_{Pdn}^{PS} + \sum_{i=1}^{N} \min(500, Y_i)\}$$

où le *stop loss* est défini par

$$\mathbf{SL}_{750xs450}\{x\} := \min[x, \max(x - 750\,\text{MCHF}, 450\,\text{MCHF})]$$

Dans le modèle standard, on peut admettre que la charge des petits sinistres est caractérisée de manière suffisamment précise par son espérance mathématique. Autrement dit

$$S_{Pdn} = E[S_{Pdn}^{PS}] + \mathbf{SL}_{750xs350}\{\sum_{i=1}^{N} \min(500, Y_i)\}$$

car l'espérance mathématique de la charge des petits sinistres est quasiment de 100 mio. de CHF.

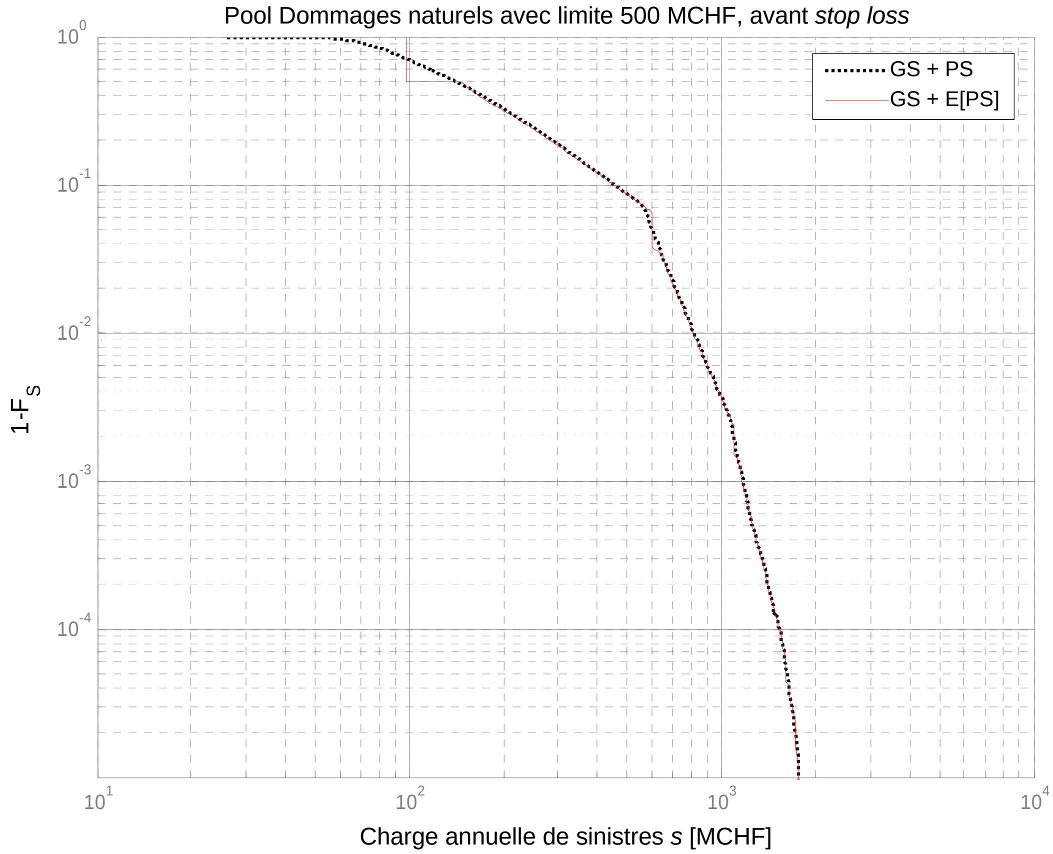


Figure 7: Probabilités de dépassement des charges annuelles de sinistres du Pool Dommages naturels avant la couverture *stop loss*. Ce graphique illustre l'effet de l'hypothèse de simplification selon laquelle les petits sinistres sont modélisés non par une distribution lognormale (courbe pointillée noire) mais par la valeur déterministe de l'espérance mathématique (courbe rouge).

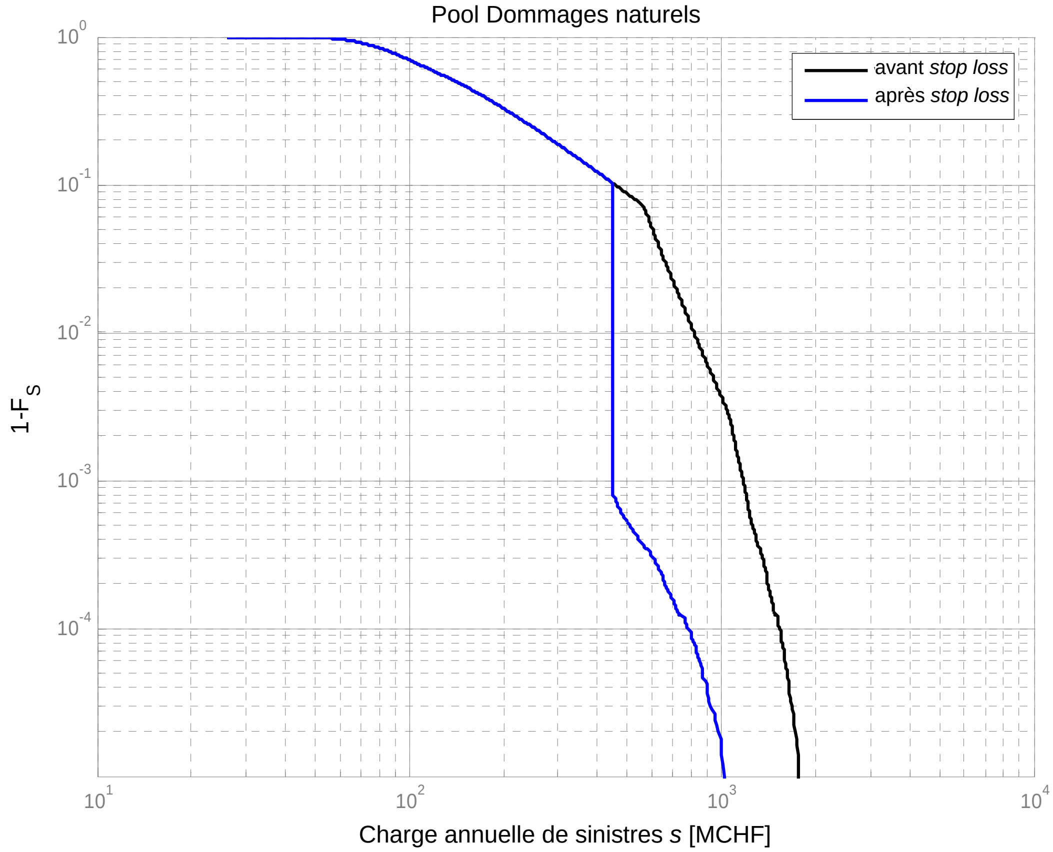


Figure 8: Probabilités de dépassement des charges annuelles de sinistres du Pool Dommages naturels avant et après la couverture *stop loss* (750 xs 450). L'*expected shortfall* est de 982 mio. de CHF avant *stop loss* et de 460 mio. de CHF après.

4.4.9.2 Modèle des autres dommages naturels

L'expérience montre que les grands sinistres provoqués par les forces de la nature ne causent pas uniquement des dommages aux bâtiments et aux biens mobiliers et qu'ils peuvent entraîner d'autres événements assurés. La catégorie la plus importante de ces dommages consécutifs ou «collatéraux» est la perte d'exploitation. Sur la base des crues d'août 2005, on a pu déterminer que ce dommage additionnel représentait environ:

- 20% du dommage Pdn pour la branche Choses,
- 10% du dommage Pdn pour la branche Casco des véhicules à moteur.

Dans le modèle standard du SST, on admet que les autres dommages naturels sont totalement corrélés aux dommages Pdn. Toutefois, seuls les autres dommages naturels de la branche Choses y sont modélisés. Dans la branche Casco des véhicules à moteur, les éventuels dommages naturels sont déjà inclus dans la distribution distincte des dommages dus à la grêle.

Si Y_j désigne comme précédemment un grand sinistre Pdn, le dommage additionnel est donc de $0{,}2 \times Y_j$. Il faut également définir un plafond pour ces dommages. Celui-ci a été fixé à 1000 mio. de CHF. La charge annuelle de sinistres est ainsi donnée par

$$S^{GS}_{autres\ dn} = \sum_j^N \min(1000\ \text{MCHF}; 0{,}2 \cdot Y_j)$$

4.4.9.3 Modèle de sommation des dommages Pdn et des autres dommages naturels

La sommation des dommages Pdn et des autres dommages naturels encourus par l'ensemble du marché de l'assurance débouche sur la formule suivante:

$$S_{dn}^{marché} = E[S_{Pdn}^{PS}] + \mathbf{SL}_{750xs350}\{\sum_{i=1}^{N} \min(500, Y_i)\} + \sum_{i=1}^{N} \min(1000; 0{,}2 \cdot Y_i)$$

Chaque entreprise d'assurances y participe dans une proportion plus ou moins grande, à concurrence de son volume d'affaires. Ramenée à la part de chaque entreprise en fonction de ses parts de marché m_{Pdn} dans l'assurance incendies, qui fait office de référence pour le Pool dn, d'une part, et m_{Pex} dans l'assurance perte d'exploitation, d'autre part, la formule ci-dessus se transforme en

$$S_{dn}^{individuel} = m_{Pdn} \cdot \left\{ E[S_{Pdn}^{PS}] + \mathbf{SL}_{750xs350}\{\sum_{i=1}^{N} \min(500, Y_i)\} \right\} + m_{Pex} \cdot \sum_{i=1}^{N} \min(1000; 0{,}2 \cdot Y_i)$$

Il faut calculer la distribution de cette valeur et l'agréger ensuite avec celles des grands et des petits sinistres des autres branches.

La figure ci-dessous illustre les distributions des dommages Pdn après *stop loss* et des dommages Pex plafonnés à 1000 mio. de CHF.

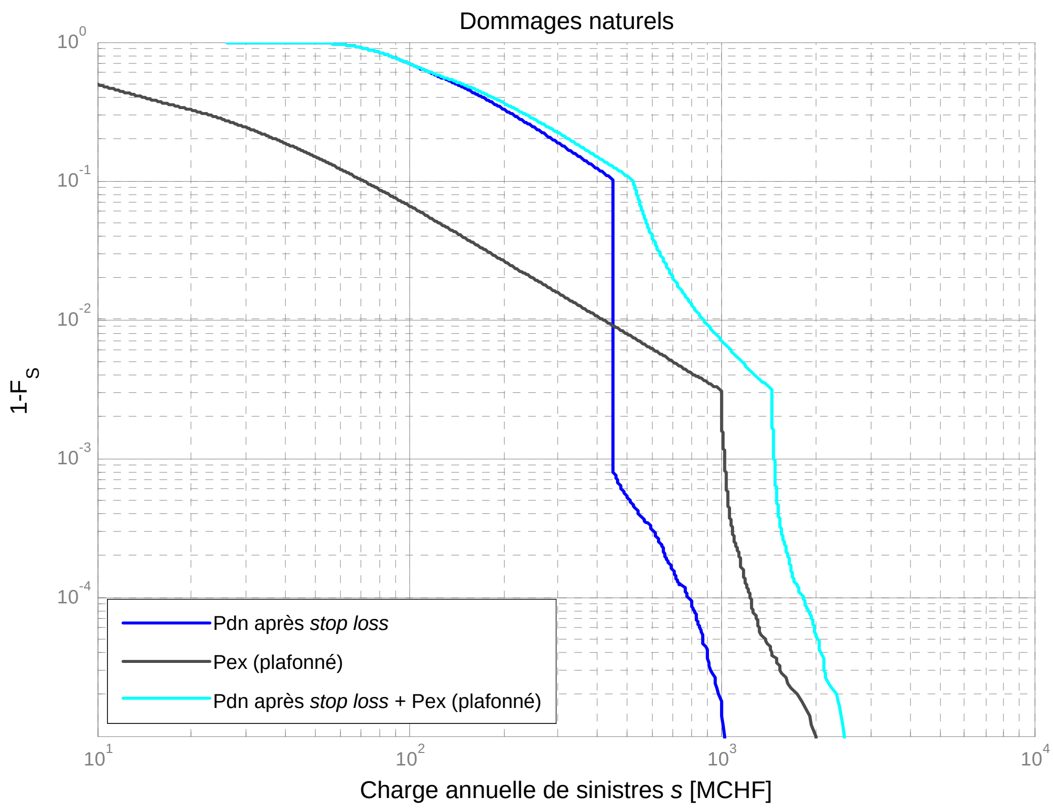


Figure 9: Probabilités de dépassement des charges annuelles de sinistres du Pool Dommages naturels après la couverture *stop loss*, des dommages Pex (plafonnés à 1000 mio. de CHF par événement) et de la somme des deux. L'*expected shortfall* est de 461, 744 et 1203 mio. de CHF respectivement.

Simplification possible en faisant abstraction de la couverture *stop loss*

Si l'on fait abstraction de la couverture *stop loss* pour les sinistres Pdn, le calcul et l'agrégation de la distribution s'en trouvent facilités. La formule précédente peut en effet être simplifiée comme suit:

$$S_{dn}^{individuel} = m_{Pdn} E[S_{Pdn}^{PS}] + \sum_{i=1}^{N} \{m_{Pdn} \min(500; Y_i) + m_{Pex} \cdot \min(1000; 0{,}2 \cdot Y_i)\}$$

La distribution de la valeur contenue dans l'accolade s'exprime aisément sous forme chiffrée. Le reste de la formule peut alors être traité exactement comme pour les grands sinistres des autres branches, à l'aide de l'algorithme de Panjer.

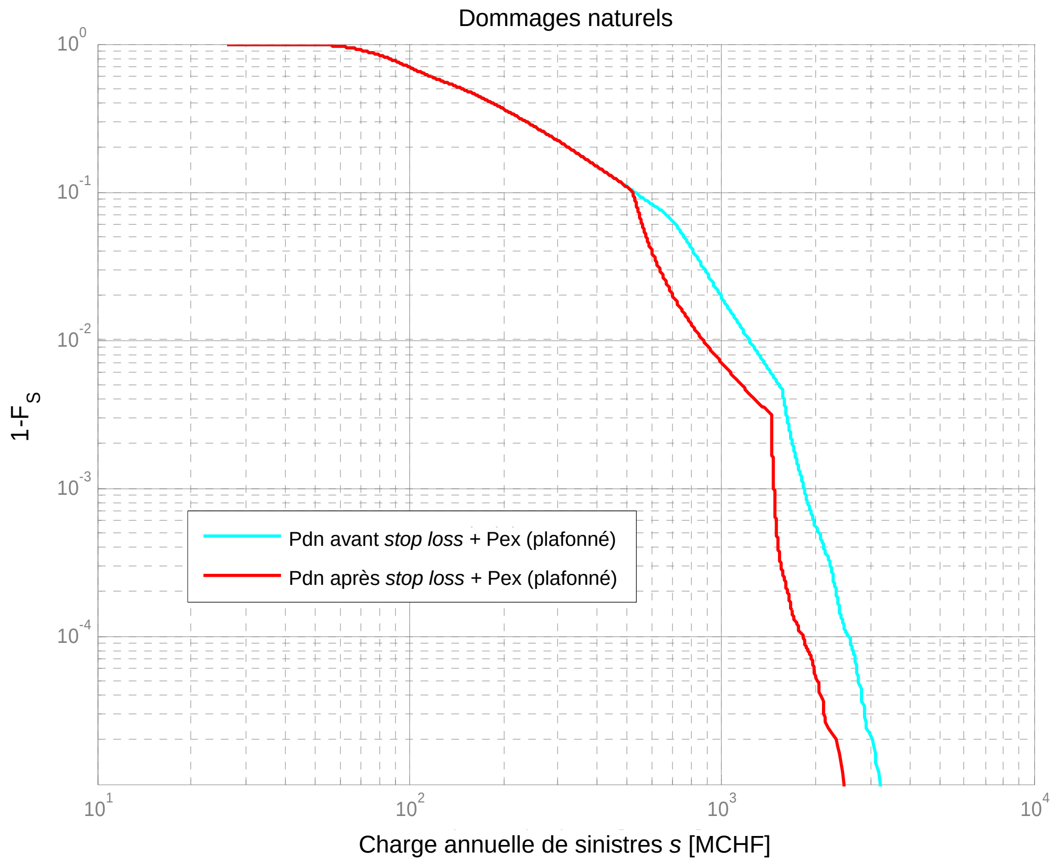


Figure 10: Probabilités de dépassement des charges annuelles de sinistres du Pool Dommages naturels et des dommages Pex (plafonnés à 1000 mio. de CHF). La courbe rouge représente les sinistres Pdn après *stop loss* et la courbe bleue avant *stop loss*. L'*expected shortfall* est de 1203 et 1547 mio. de CHF respectivement.
La mise à l'écart de la couverture *stop loss* se traduit par un résultat plus conservateur, mais la modélisation est plus simple puisqu'il est possible d'appliquer l'algorithme de Panjer.

4.4.10 Détermination de la distribution du résultat technique des sinistres AP

L'incertitude quant au résultat de liquidation des sinistres AP est le risque de provisionnement.

Dans le modèle standard, on admet que $C_{AP} \cdot R_{AP}^{(0)}$ est une distribution lognormale qui a une certaine variance et dont l'espérance mathématique est $R_{AP}^{(0)}$, ce qui implique que nous nous basons sur l'estimation non biaisée des réserves $E[C_{AP}] = 1$. Dans la suite de cet exposé, nous allons déterminer comment il faut estimer la variance et, comme pour les nouveaux sinistres, on fait une distinction entre le risque aléatoire et le risque paramétrique.

Le risque aléatoire naît des erreurs d'estimation des sinistres individuels. Il est calculé séparément pour chaque entreprise, en estimant les variances des réserves des treize branches

$$Var_A(C_{AP,i} \cdot R^{(0)}_{AP,i}) \qquad (i = 1,...,12)$$

à partir des séries chronologiques des résultats de liquidation. Il est indispensable que les résultats de liquidation soient établis sur la base d'estimations non biaisées des réserves.

Le risque paramétrique des réserves reflète l'incertitude relative à l'estimation de certains paramètres qui ont un effet simultané sur toutes les réserves d'une branche. Il peut aussi résulter d'une erreur d'appréciation lors de la définition du niveau global des réserves de sinistres.

Le groupe de travail du SST n'a pas encore arrêté une formule définitive pour déterminer le risque paramétrique. C'est pourquoi les coefficients de variation des réserves relatifs au risque paramétrique sont actuellement définis par l'OFAP (cf. annexe 8.4.6). Ils reposent sur des valeurs moyennes de l'aléa paramétrique au sein de grands volumes de réserves.

La variance du risque paramétrique Var_P pour $C_{AP} \cdot R^{(0)}_{AP}$ se calcule aisément à l'aide des coefficients de variation prescrits pour les treize branches:

$$Var_P(C_{AP,i} \cdot R^{(0)}_{AP,i}) = \left(R^{(0)}_{AP,i} \cdot CV_P(CA_{AP,i})\right)^2 \qquad (i = 1,...,13)$$

Les risques paramétrique et aléatoire sont agrégés par branche, par addition des variances:

$$Var(C_{AP,i} \cdot R^{(0)}_{AP,i}) = Var_P(C_{AP,i} \cdot R^{(0)}_{AP,i}) + Var_A(C_{AP,i} \cdot R^{(0)}_{AP,i}) \qquad (i = 1,...,13)$$

Dans le SST Pilote 2005, l'agrégation des risques des différentes branches s'était faite par sommation des variances des branches, sans covariance, ce qui implique l'absence de corrélation entre les branches.

$$Var(C_{AP} \cdot R^{(0)}_{AP}) = \sum_{i}^{12} Var(C_{AP,i} \cdot R^{(0)}_{AP,i})$$

Il se peut qu'à l'avenir l'on revienne sur l'hypothèse d'une absence de corrélation entre les branches.

De ce qui précède, il découle que la variance de l'expression $(1 - C_{AP}) \cdot R^{(0)}_{AP}$ est $Var(C_{AP} \cdot R^{(0)}_{AP})$ et que son espérance mathématique est nulle.

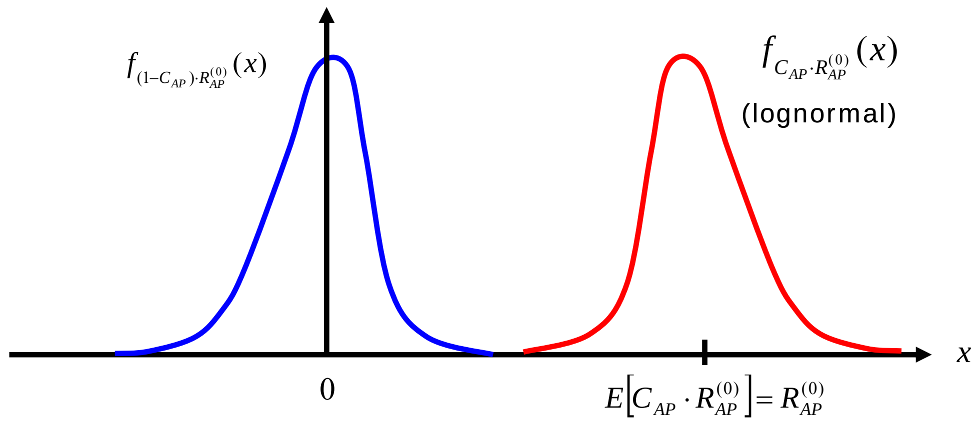


Figure: Représentation schématique des distributions de $C_{AP}\cdot R_{AP}^{(0)}$ (courbe rouge) et de $(1-C_{AP})\cdot R_{AP}^{(0)}$ (courbe bleue).

4.4.10.1 Remarques concernant les risques de provisionnement dans l'assurance-accidents

L'assurance-accidents se subdivise en trois segments:

- l'assurance obligatoire selon la LAA, qui est souscrite par les employeurs pour assurer collectivement les salariés;
- les assurances complémentaires (LAA compl.), qui couvrent généralement la même collectivité d'assurés que l'assurance obligatoire et les risques qui ne sont pas inclus dans la couverture LAA;
- l'assurance-accidents individuelle (AAI) qui assure les personnes individuellement contre le risque d'accidents.

Dans l'assurance-accidents on fait une distinction entre

- les prestations à court terme telles que les frais de guérison, les indemnités journalières, les prothèses, la rééducation, etc.;
- les prestations de longue durée qui sont les rentes en cas d'incapacité de travail, composées d'une rente de base et d'une allocation de renchérissement.

Risques de provisionnement sur les sinistres sans rente ou avant rente

Lorsqu'un accident survient, l'assureur constitue une réserve en vue du règlement du sinistre en tenant compte des possibilités de recours en responsabilité. Les réserves pour sinistres couvrent généralement les prestations à court terme et celles de longue durée. Comme dans les autres branches, ces réserves sont affectées d'un risque de provisionnement.

Risque de provisionnement sur les prestations de longue durée (rentes)

Voir également au paragraphe 4.4.4.4.

Lorsqu'un accident conduit au versement d'une rente, l'assureur détermine une «réserve mathématique de rente» en vue de son règlement. Certains assureurs séparent cette réserve mathématique des réserves pour sinistres, d'autres pas.

Comme le montant de la rente est fixé lors de la conversion du capital en rente, à partir de ce moment l'assureur n'encourt plus aucun risque, à une exception près. Les rentes versées doivent en effet être régulièrement adaptées au renchérissement sur la base d'un indice, et comme l'évolution de l'inflation ne peut être prévue à l'avance, l'assureur encourt un risque.

Nous ne nous attarderons pas sur la manière de fixer le renchérissement des rentes. Ce dernier est financé par la performance des placements réalisée sur la réserve mathématique des rentes et si celle-ci est insuffisante, par le prélèvement de cotisations supplémentaires appelées «primes de répartition» auprès des assurés actifs. Ce mécanisme permet à l'assureur de reporter le risque de renchérissement sur les actifs. S'il n'a plus d'assurés actifs dans son portefeuille, il ne peut cependant pas prélever de primes de répartition. C'est pour dégrever les assureurs de ce risque qu'a été créé le fonds de renchérissement pour les rentes LAA. A l'heure actuelle, les conditions dans lesquelles un assureur peut bénéficier des prestations de ce fonds ne sont cependant pas encore définies clairement.

L'hypothèse de travail retenue pour le SST Pilote 2006 est que le fonds de renchérissement prend en charge le risque de renchérissement des rentes LAA. Cela signifie que dans le SST Pilote, il n'y a aucun risque de provisionnement pour les rentes LAA.

4.4.11 Agrégation des risques techniques

Remarque liminaire: dans le modèle standard, l'agrégation des risques de provisionnement et des petits sinistres se fait soit par produit de convolution des deux distributions, soit de manière simplifiée en admettant que la distribution de la somme est lognormale.

Dans les chapitres précédents, nous avons expliqué comment obtenir la distribution de la charge de sinistres S_{AC} et celle du résultat de liquidation $(1-C_{AP})\cdot R_{AP}^{(0)}$.

Nous avons toutefois besoin d'une distribution globale du risque technique fondée sur la formule (19):

$$\left(P-F-d_{AC}^{(0)}E[S_{AC}]\right)-d_{AC}^{(0)}\left(S_{AC}-E[S_{AC}]\right)-d_{AP}^{(0)}\left(C_{AP}-1\right)R_{AP}^{(0)}$$

Si nous recourons à cette formule centrée sur l'espérance mathématique $E[S_{AC}]$, nous devons encore réaliser les opérations suivantes:

- centrage de S_{AC} sur $E[S_{AC}]$ afin d'obtenir une distribution de $\left(S_{AC}-E[S_{AC}]\right)$;
- actualisation de $\left(S_{AC}-E[S_{AC}]\right)$ à l'aide du facteur $d_{AC}^{(0)}$;
- actualisation du résultat de liquidation $(1-C_{AP})\cdot R_{AP}^{(0)}$ à l'aide du facteur $d_{AP}^{(0)}$;
- agrégation de la charge de sinistres AC actualisée et du résultat de liquidation;
- translation de la distribution à raison de la valeur déterministe $\left(P-F-d_{AC}^{(0)}E[S_{AC}]\right)$.

Dans la suite de cet exposé, nous nous pencherons sur l'avant-dernier point, à savoir l'agrégation de la charge de sinistres AC avec le résultat de liquidation.

Comme nous l'avons montré précédemment, le terme $d_{AC}^{(0)}\left(S_{AC}-E[S_{AC}]\right)$ se compose de petits et de grands sinistres. Fondamentalement, nous disposons de deux possibilités pour agréger ces deux catégories.

D'une part, on peut modéliser la charge des petits sinistres S_{AC}^{PS} à l'aide d'une distribution lognormale (espérance mathématique et variance selon ch. 4.4.7) que l'on agrège ensuite avec la distribution des grands sinistres par produit de convolution. Ce procédé, représenté dans le schéma ci-dessous, débouche sur la distribution des sinistres AC.

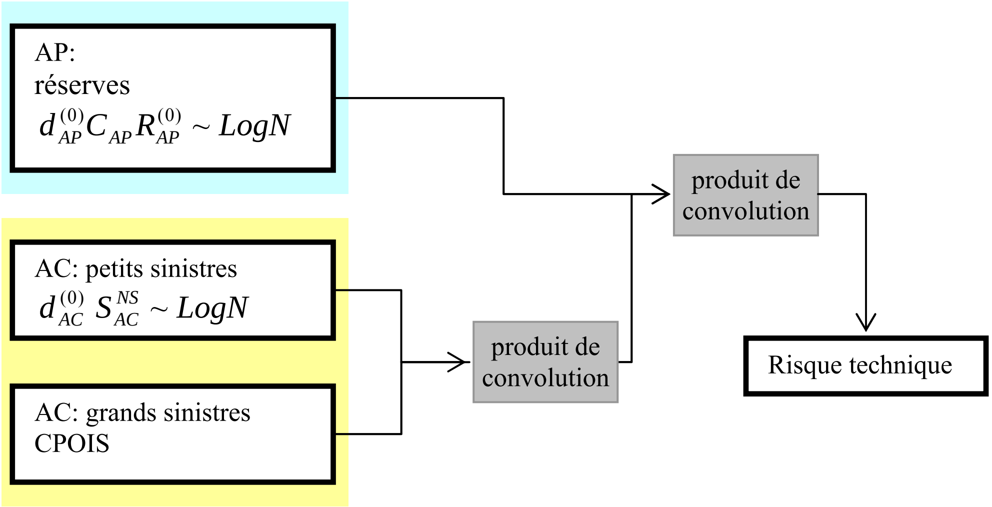


Figure 6: Agrégation des risques techniques pour la formule (17b) ou (19). Agrégation des petits et des grands sinistres, puis agrégation avec le risque de provisionnement. A noter que le produit de convolution doit se faire en tenant compte des facteurs d'actualisation.

D'autre part, le modèle standard SST permet de s'épargner un produit de convolution. Dans cette variante, on agrège la charge des petits sinistres avec le risque de provisionnement

$$d_{AC}^{(0)} S_{AC}^{PS} + d_{AP}^{(0)} C_{AP} R_{AP}^{(0)}$$

Cette agrégation peut se faire par approximation, en additionnant les espérances mathématiques et les variances. Le SST retient l'hypothèse selon laquelle la distribution de la variable obtenue de cette manière est lognormale.

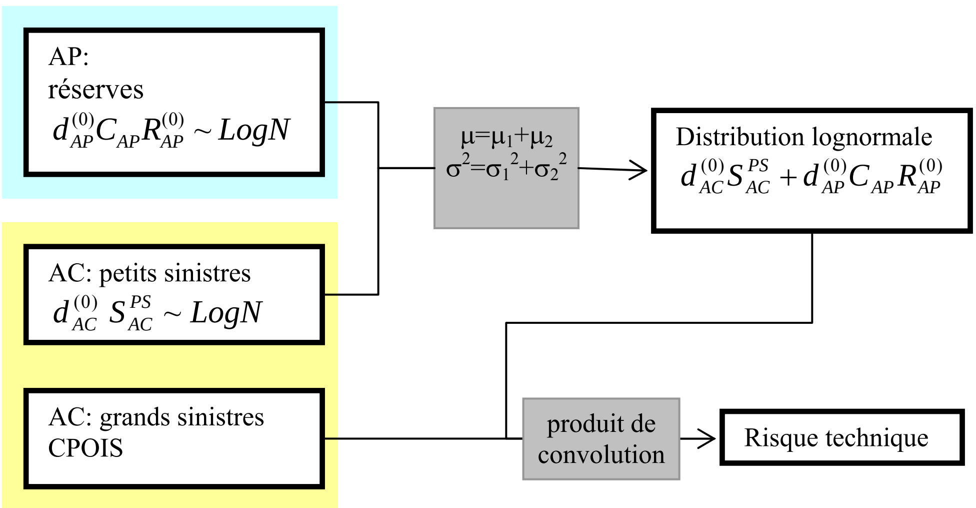


Figure 7: Agrégation des risques techniques pour la formule (17b) ou (19). Agrégation des risques de provisionnement et des petits sinistres par addition des moments, puis agrégation avec les grands sinistres. A noter que le produit de convolution doit se faire en tenant compte des facteurs d'actualisation.

Dans les deux cas, une estimation de l'espérance mathématique et de la variance de la charge annuelle des petits sinistres est suffisante.

4.4.12 Réassurance

S’ils le souhaitent, les assureurs peuvent intégrer la réassurance de façon appropriée dans la modélisation des sinistres. La modélisation de la charge des grands sinistres sous forme de variable aléatoire de Poisson composée permet par exemple d’intégrer aisément les couvertures en excédent de sinistre. Les programmes individuels de réassurance étant très variables d’une entreprise à l’autre, le SST ne prévoit aucune contrainte à ce sujet. De la même manière, les couvertures proportionnelles peuvent être représentées aisément.

Si la réassurance est intégrée dans la modélisation des sinistres, les primes et les frais afférents doivent aussi être pris en compte dans les flux de trésorerie. De plus, le scénario de réassurance doit être intégré lors de l’agrégation des scénarios.

4.5 Modèle standard pour l’assurance-maladie

4.5.1 Introduction

Le modèle standard pour les assureurs-maladie adopte une hypothèse simplificatrice qui n’a pas lieu pour les assurances-vie et les assurances dommages. Ce modèle considère que les provisions pour sinistres ne sont pas prévues pour plusieurs années, mais sont utilisées dans le délai d’une année. Cela a pour conséquence que la valeur des provisions pour sinistres n’est pas escomptée dans le bilan proche du marché du SST. Les provisions pour sinistres ne dépendent donc pas de la courbe de l’intérêt et ne supportent aucun risque d’intérêt (contrairement aux provisions des assureurs-vie et dommages). Le modèle pour les risques de marché n’est ainsi pas un modèle d’actifs et de passifs, mais un pur modèle d’actifs.
En raison du caractère annuel des provisions, le calcul de la « Market Value Margin» tombe également.

Vu que les provisions sont indépendantes des intérêts, la séparation des risques du marché et des risques actuariels est simple à effectuer. Ici, nous décrivons uniquement le risque actuariel; le risque du marché est abordé au paragraphe 4.1.
Les affaires soumises au SST et décrites ici sont celles d’assurance-maladie selon la Loi sur le contrat d’assurance (LCA). D’éventuelles affaires dans l’assurance-maladie obligatoire ne font pas partie intégrante du SST.

4.5.2 Modélisation

Les valeurs des actifs (Assets) et des passifs (Liabilities) aux instants t_0 = Début de l’année et t_1 = Fin de l’année sont $A(0)$, $A(1)$, $L(0)$ et $L(1)$. $L(0)$ et $L(1)$ comprennent des provisions pour sinistres et d’éventuelles provisions de vieillissement.

Les valeurs des placements et des engagements se modifient en cours d’année. Les causes en sont, d’une part, les flux de paiements et, d’autre part, les modifications de valeurs. Font partie des flux de paiements importants les encaissements de primes P, les frais d’exploitation et de gestion K, les prestations d’assurance pour sinistres survenus S et d’éventuels dividendes et rendements de coupons sur les placements. Des modifications de valeur de positions résultent par exemple de modifications des valeurs du marché des placements (modification du cours de la bourse pendant l’année). Nous abordons maintenant la modélisation des valeurs des placements et des engagements.

La valeur des placements à la fin de l’année ($t = t_1$) est

$$A(1) = (1 + R) \cdot A(0) + P - K - S ,$$

où le terme $R \cdot A(0)$ désigne la performance stochastique annuelle de l’ensemble de tous les placements. Elle comprend aussi bien les revenus (par ex. paiements de coupons, dividendes) que les modifications des valeurs de cours. Eu égard à l’instant t_0, la performance est une grandeur inconnue, une variable aléatoire. Elle a une espérance et un écart-type qui résultent de la composition du portefeuille d’actifs.

La valeur des passifs à la fin de l’année ($t = t_1$) est écrite comme

$$L(1) = L(0) + \Delta L .$$

Ainsi, nous avons introduit uniquement le symbole ΔL. Si l'on introduit ces grandeurs dans $\frac{RTK(1)}{1+r_1^{(0)}} - RTK(0)$, l'on obtient:

$$= \frac{(1+R)\cdot A(0) + P - K - S - (L(0)+\Delta L)}{1+r_1^{(0)}} - A(0) + L(0)$$

$$= \frac{1}{1+r_1^{(0)}} \cdot \left((R - r_1^{(0)}) \cdot A(0) + P - K - S - \Delta L + r_1^{(0)} L(0) \right)$$

Seules les prestations S et la modification de valeur des placements R sont considérées comme variables stochastiques. Par simplification, les autres variables sont considérées comme déterministes.

Il est instructif d'exprimer les montants stochastiques comme leur espérance et la fluctuation autour de l'espérance. Il en découle ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{RTK(1)}{1+r_1^{(0)}} - RTK(0) = & \frac{(R - E[R])\cdot A(0)}{1+r_1^{(0)}} \\ & + \frac{E[R]\cdot A(0) - r_1^{(0)}(A(0) - L(0)) + P - K - E[S] - \Delta L}{1+r_1^{(0)}} \\ & - \frac{S - E(S)}{1+r_1^{(0)}} \end{aligned}$$

Le membre de droite est composé de trois éléments que l'on peut interpréter comme suit:

- La première ligne montre le caractère aléatoire de valeurs de marché des actifs autour de la valeur attendue à la fin de l'année. Ce terme est modélisé par une distribution normale centrée autour de zéro.
- La deuxième ligne se compose des résultats attendus de la partie finances et de la partie assurance.
- Enfin, la troisième ligne représente l'incertitude des prestations annuelles pour sinistres autour de la valeur attendue.

Les grandeurs traitées comme déterministes pour la considération du risque doivent être estimées sur la base des informations se référant au moment t_0. Il s'agit d'estimations de
la valeur attendue de la prime P,
la valeur attendue des frais d'exploitation et de gestion K et de
la valeur attendue de la modification des provisions ΔL.
De même, les espérances des grandeurs traitées comme stochastiques pour la considération du risque ne sont pas connues. Doivent également être estimées
les prestations annuelles attendues $E[S]$ et
la performance attendue des actifs $E[R]\cdot A(0)$.

> Les événements postérieurs à l'instant t_0 (1er janvier) ne doivent pas influer les estimations des espérances annuelles bien que les calculs effectifs du SST soient effectués après l'instant t_0. La raison en est que pour le SST le risque annuel du portefeuille existant au 1er janvier doit précisément être déterminé en considération de ce jour et comparé au capital disponible au 1er janvier. Le budget ou des prévisions pour l'année peuvent constituer des estimations de la valeur attendue s'ils sont fondés.

La modélisation du risque de placement, respectivement la modélisation de la performance de la performance des actifs $R \cdot A(0)$ comprend deux points. Il faut faire une distinction entre la performance attendue

$$E[R] \cdot A(0),$$

qui doit être estimée par l'assureur, et la modélisation des écarts possibles entre la performance et sa valeur attendue

$$R \cdot A(0) - E[R] \cdot A(0) \sim N(0,\sigma).$$

Cette partie est une variable aléatoire dont il est admis qu'elle est distribuée selon une loi normale. Le calcul de son écart-type σ est présenté au paragraphe 4.1.

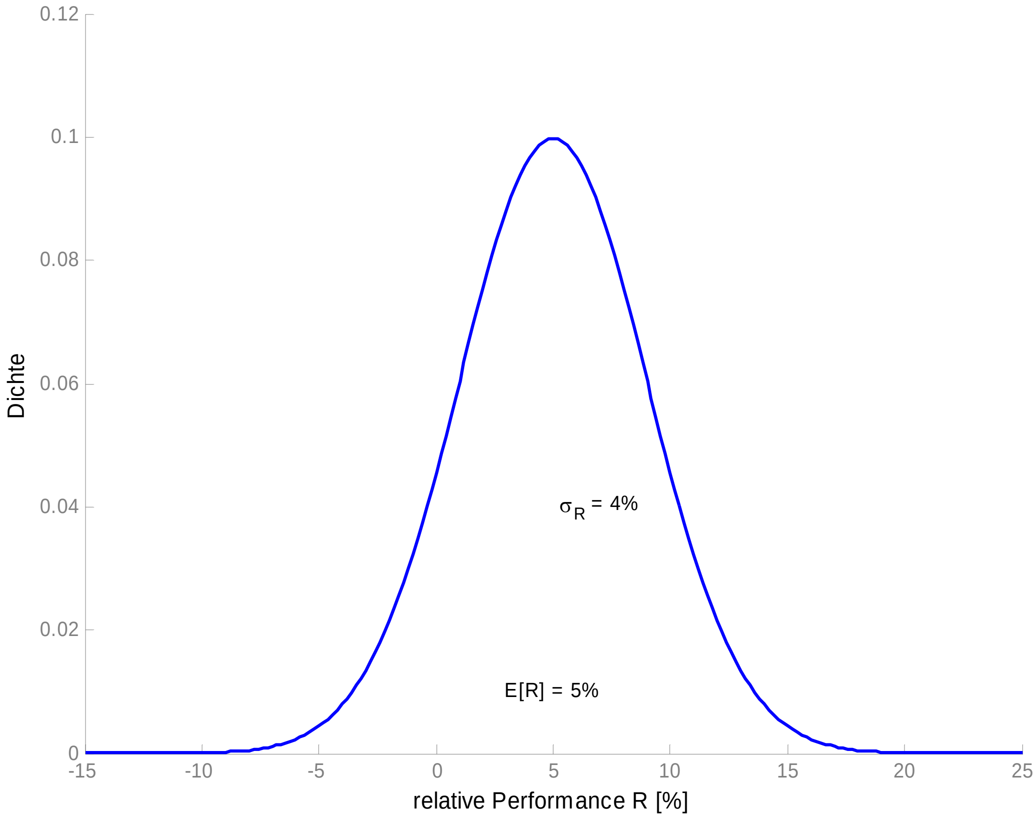


Figure 11: Exemple d'une distribution pour la performance R des actifs avec une valeur attendue de 5% et une volatilité de 4%.

Ci-après, nous abordons le risque actuariel. Il est décrit, par branche, comment la grandeur $S - E[S]$ (incertitude des prestations annuelles pour sinistres autour des prestations annuelles attendues) est modélisée dans le modèle standard. Par souci de simplification, l'on admet que sa distribution est normale.

4.5.3 Répartition des branches

Le modèle standard du SST pour les assureurs-maladie distingue trois branches ("Lines of Business", LoB). Celles-ci sont

- E: Frais de guérison LCA et indemnités journalières dans l'assurance individuelle
- K: Indemnités journalières pour perte de gain dans l'assurance collective
- O: Autres affaires exploitées par l'assureur-maladie

4.5.4 Risque d'assurance par branche

Nous considérons tout d'abord les deux premières branches, E et K. Dans les deux branches, la somme des prestations annuelles S_E et S_K doit être modélisée. Nous adoptons l'hypothèse simplificatrice selon laquelle elles sont réparties normalement. Le but est ainsi d'estimer dans les deux LoB les deux premiers moments de la distribution normale pour les prestations annuelles.

Dans les deux branches, le risque a deux causes:
- Des fluctuations aléatoires du nombre de cas et de la variabilité du niveau des cas individuels. Le risque qui leur est lié est qualifié de risque aléatoire.
- L'incertitude dans l'estimation des paramètres, comme par ex. le renchérissement attendu, la valeur attendue du nombre des sinistres, le niveau moyen des sinistres, etc. Le risque qui leur est lié s'appelle risque paramétrique.

Aussi bien le risque aléatoire que le risque paramétrique conduisent à une variance. La variance totale est la somme de ces deux variances. L'indice Z sera attaché à la composante aléatoire, et P à la composante paramétrique.

4.5.4.1 LoB E: Frais de guérison LCA et indemnités journalières individuelles

Nous utilisons la notation suivante

n_E	Nombre d'assurés
M_E	Nombre de sinistres, variable aléatoire, distribution de Poisson
$\mu_{M_E} = E[M_E]$	Espérance du nombre de sinistres
σ_{M_E}	Ecart-type du nombre de sinistres
$Y^E{}_i$	Niveaux des sinistres individuels (i=1, ..., M), variables aléatoires i.i.d.
$\mu_{Y_E} = E[Y^E{}_i]$	Espérance du niveau individuel des sinistres
σ_{Y_E}	Ecart-type du niveau individuel des sinistres

Risque aléatoire

Nous considérons tout d'abord le risque aléatoire de la somme annuelle des sinistres.
Nous admettons que le nombre M_E des sinistres est distribué selon une loi de Poisson:

$$M_E \sim Pois(\mu_{M_E})\,. \qquad (48)$$

L'on obtient ainsi pour la variance de M_E:

$$(\sigma_{M_E})^2 = \mu_{M_E}\,. \qquad (49)$$

Nous ne nous exprimons pas au sujet de la forme de distribution du niveau individuel des sinistres Y_i.
La somme annuelle des sinistres S_E se compose des niveaux individuels des sinistres:

$$S_E = \sum_{i=1}^{M_E} Y^E{}_i \,. \tag{50}$$

Il en découle les expressions connues pour l'espérance et la variance du risque aléatoire:

$$E[S_E] = \mu_{M_E} \cdot \mu_{Y_E} \tag{51}$$

$$Var_Z(S_E) = \mu_{M_E} \cdot \sigma_{Y_E}{}^2 + \sigma_{M_E}{}^2 \cdot \mu_{Y_E}{}^2 \,. \tag{52}$$

Au lieu de la variance, nous considérons le coefficient de variation Vko:

$$Vko_Z^2(S_E) := \frac{Var_Z(S_E)}{E^2[S_E]} = \frac{\sigma_{Y_E}{}^2}{\mu_{M_E}\mu_{Y_E}{}^2} + \frac{\sigma_{M_E}{}^2}{\mu_{M_E}{}^2} = \frac{1}{\mu_{M_E}} \cdot (Vko^2(Y_E) + 1) \,. \tag{53}$$

$Vko(Y_E)$ est le coefficient de variation du niveau des sinistres individuels, défini comme $Vko(Y_E) = \frac{\sigma_{Y_E}}{\mu_{Y_E}}$. Dans le modèle standard, cette valeur est prédéfinie.

Risque paramétrique

La variance de S_E découlant du risque paramétrique est désignée par $Var_P(S_E)$. A la place de la variance, nous pouvons à nouveau introduire le coefficient de variation $Vko_P(S_E)$:

$$Vko_P(S_E) = \frac{\sqrt{Var_P(S_E)}}{E[S_E]} \,. \tag{54}$$

Risque aléatoire et risque paramétrique combinés

Les effets combinés des risques paramétrique et aléatoire donnent

$$Vko^2(S_E) = Vko_P^2(S_E) + Vko_Z^2(S_E) = Vko_P^2(S_E) + \frac{1}{\mu_{M_E}} \cdot (Vko^2(Y_E) + 1) \,. \tag{55}$$

Finalement, nous obtenons pour la variance des prestations annuelles d'assurance pour sinistres

$$Var(S_E) = Vko^2(S_E) \cdot E^2[S_E] \,. \tag{56}$$

Dans la statistique des assureurs-maladie lors du test SST 2004, il est apparu que

$$Vko(Y_E) \approx 5 \,.$$

Lors du test 2004, le coefficient de variation du risque paramétrique a été arrêté par quelques assureurs-maladie à

$$Vko_P(S_E) = 0.0575 \,.$$

Avec ces valeurs standards, il est possible d'estimer la variabilité de S_E sur la base de μ_{M_E} :

$$Vko^2(S_E) = 0.0575^2 + \frac{1}{E[M_E]} \cdot \left(5^2 + 1\right). \tag{57}$$

Cette fonction est représentée dans la Figure 12.

Pour autant que cela soit justifié, il est possible de s'écarter des valeurs standards.

4.5.4.2 LoB K: Indemnités journalières collectives

Pour les indemnités journalières pour perte de gain dans l'assurance collective, deux méthodes distinctes peuvent être utilisées pour l'estimation de la variance. Celles-ci sont admises indifféremment par l'OFAP.

Première méthode

La première méthode détermine la variance dans les indemnités journalières collectives de la même manière que pour les affaires individuelles (LoB E). Elle repose ainsi sur des informations concernant le nombre de cas et le niveau des cas individuels. L'hypothèse concernant le nombre de cas est que ceux-ci sont distribués selon une loi de Poisson. Comme pour l'assurance-maladie individuelle, cette hypothèse conduit à

$$Vko^2(S_K) = Vko_P{}^2(S_K) + Vko_Z{}^2(S_K) = Vko_P{}^2(S_K) + \frac{1}{\mu_{M_K}} \cdot \left(Vko(Y_K) + 1\right). \tag{58}$$

Dans ce contexte μ_{M_K} désigne le nombre attendu des sinistres et $Vko(Y_K)$ le coefficient de variation pour le niveau des sinistres individuels. L'analyse du test SST 2004 a fourni les valeurs de paramètres suivantes:

$$Vko(Y_K) = 2.5$$

et

$$Vko_P(S_K) = 0.0575\,.$$

Avec ces paramètres standards, il est à nouveau possible d'estimer le coefficient de variation sur la base de:

$$Vko^2(S_K) = 0.0575^2 + \frac{1}{\text{Nombre de sinistres attendu}} \cdot \left(2.5^2 + 1\right). \tag{59}$$

Cette fonction est dessinée dans la Figure 12. Elle ne dépend plus que du nombre de sinistres attendu, c.-à-d. d'une grandeur qui est simple à déterminer pour les assureurs.

Deuxième méthode

Dans le domaine des indemnités journalières collectives avec primes en pour-cent du salaire, les données sont en général plus rares que pour les affaires individuelles. Habituellement il n'existe pas d'indications fiables concernant le nombre d'assurés.

Pour estimer l'écart-type de la prestation annuelle dans les indemnités journalières collectives, l'on détermine tout d'abord l'écart-type $\hat{\sigma}_{Hist}$ des taux de prestations observés historiquement (des prestations par rapport au volumes des primes contractuelles).

L'estimation à utiliser de l'écart-type est alors donnée par

$$\hat{\sigma} = \max(\hat{\sigma}_{Hist}, \sigma_P),$$

où $\sigma_P = 0.0575 \times E[S_K]$ est l'écart-type du risque paramétrique selon la première méthode. L'on obtient ainsi que l'écart-type utilisé n'est pas moins élevé que l'écart-type découlant du risque paramétrique.

Contrairement aux attentes, il s'est avéré lors du test 2004 que les contrats plus petits n'ont pas un écart-type plus élevé du taux de prestations. Une analyse complémentaire plus approfondie des données n'a livré aucune relation plausible ou statistiquement significative entre le risque et d'autres paramètres utilisés.

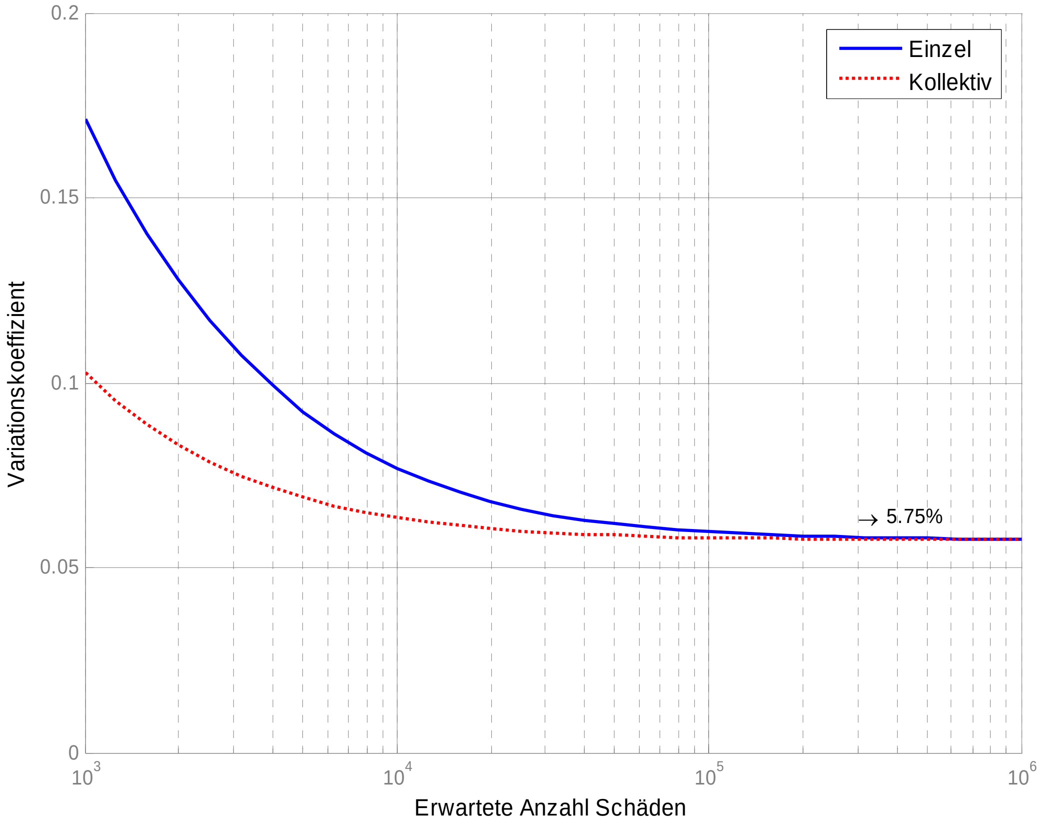


Figure 12: Coefficients de variation des prestations annuelles pour les deux branches « individuelle » et « collective » comme fonction du nombre de cas attendu dans le modèle standard. Plus le portefeuille est important, plus le nombre de sinistres à attendre est élevé; plus la diversification est forte et plus le risque aléatoire tend à disparaître. La variation du risque paramétrique ne peut toutefois pas être éliminée, raison pour laquelle, dans les portefeuilles importants, les deux coefficients de variation tendent vers le coefficient de variation (5.75%) du risque paramétrique.

4.5.4.3 LoB O: Autres affaires

Entrent dans la branche « Autres affaires » les affaires qui ne sont pas en relation avec l'assurance-maladie, mais sont tout de même exploitées par un assureur-maladie. L'on peut citer à titre d'exemples l'assurance-accidents ou l'assurance ménage.

Il est dans la nature de ces champs d'activité qu'il existe un risque actuariel. Ces risques sont des risques tels que ceux qu'un assureur dommages typique assume; par conséquent, le traitement des risques est réglé dans le SST pour les assureurs non-vie. Dès lors, les risques de la LoB O doivent être quantifiés comme dans le SST pour les assureurs dommages.

Une procédure simplifiée peut cependant être choisie en lieu et place si le volumes de primes (après réassurance éventuelle) de la LoB O est inférieur à 10% du volume de primes total de l'entité juridique considérée.
La procédure simplifiée consiste en ceci que la distribution des dépenses pour sinistres peut être représentée par une distribution normale dont la variance et l'espérance doivent être estimées par l'assureur-maladie.

5. Scénarios

5.1 Introduction

L'une des exigences du SST est l'appréciation de scénarios. Les scénarios illustrent des événements

- qui présente une très faible probabilité et
- qui ont une influence négative sur le capital porteur de risque.

L'autorité de surveillance prescrit une série de scénarios. Les entreprises d'assurances sont tenues d'y ajouter leurs propres scénarios, qui doivent représenter plus spécifiquement les risques encourus par l'entreprise. Si un risque mis en évidence par un scénario n'est pas modélisé par ailleurs, l'évaluation de ce scénario doit être intégrée dans le calcul du capital cible. Le SST connaît donc deux types de scénarios:

- Type 1: scénarios qui doivent être évalués et dont les effets sont agrégés avec la distribution du modèle distribué (méthode d'agrégation). Les scénarios de ce type illustrent des risques qui ne sont pas intégrés dans ce modèle.

- Type 2: scénarios qui doivent être évalués mais dont les effets ne doivent pas être agrégés avec le modèle distribué. Les scénarios de ce type illustrent des risques qui sont déjà intégrés dans ce modèle. L'évaluation du scénario peut servir à confirmer ou à adapter les hypothèses qui sous-tendent le modèle distribué.

Lors de l'analyse des scénarios, il faut tenir compte de leurs effets sur la charge de sinistres, mais aussi de toutes les répercussions qu'ils peuvent avoir pour l'entreprise d'assurance. Un scénario «bombe sale dans une ville européenne» a par exemple des conséquences directes pour l'entreprise sous la forme de prestations d'assurance, mais il a aussi des effets indirects à travers les marchés financiers et l'économie. Ces aspects doivent être pris en compte.

L'entreprise d'assurances doit estimer pour chaque scénario i ses effets c_i sur l'espérance mathématique du capital porteur de risque. L'analyse des scénarios permet tout d'abord de vérifier si le capital porteur de risque au début de l'année est suffisant pour faire face au scénario examiné. Mais les scénarios du type 1 ne doivent pas seulement être utilisés sous la forme de tests de marges (*stress test*). Ils sont directement intégrés dans le capital cible. Par la suite, nous décrirons la méthode qui doit être utilisée pour le modèle standard. Cette méthode peut être modifiée aux fins de mise en œuvre d'un modèle interne en lieu et place du modèle standard.

5.2 Scénarios du modèle standard

La partie du modèle standard décrite jusqu'à présent consiste en une fonction de distribution des variations du capital porteur de risque. Le recours à des scénarios sert à affiner les résultats du modèle dans la queue de la distribution, mais il faut s'assurer que les dommages décrits dans les scénarios ne sont pas déjà représentés dans le modèle distribué. Cette approche repose sur une conception selon laquelle la distribution modélisée analytiquement ne tient pas suffisamment compte de certaines situations extrêmes.

Il se peut que certains scénarios obligatoires aient des effets positifs pour un assureur, autrement dit qu'ils soient source de bénéfice. Dans ce cas, ils peuvent tout de même être intégrés dans le résultat du SST. En revanche, il n'est pas permis de créer un scénario interne dont l'évaluation déboucherait sur un bénéfice.

5.2.1 Liste des scénarios obligatoires

Le tableau suivant récapitule les scénarios définis pour les assureurs vie, maladie et non-vie. La formulation des scénarios se rapporte au modèle standard. La signification des scénarios de type 2 est expliquée au paragraphe 5.1 ci-dessus.

Scénario	Probabilité	Vie	Non-vie	Maladie
Accident industriel	0,5%		×	
Pandémie	1%	×	×	×
Accident: sortie d'entreprise	0,5%		×	×
Accident: panique au stade	Type 2: sans intérêt pour le capital cible		×	×
Grêle	Type 2: sans intérêt pour le capital cible		×	
Invalidité	0,5%	×		
Indemnité journalière maladie	0,5%			×
Défaillance des réassureurs	Dépend du portefeuille réa.	×	×	×
Difficultés financières	0,5%	×	×	×
Déflation	0,1%	×	×	×
Provisionnement insuffisant	0,5%		×	×
Antisélection dans l'ass.-maladie	0,5%			×
Risques financiers historiques	0,1% chacun	×	×	×
Terrorisme	0,5%	×	×	×
Longévité	0,5%	×		

5.2.1.1 Accident industriel

Ce scénario envisage un accident grave sur un site industriel. Il s'agit d'une explosion dans une usine chimique avec des conséquences comparables à celle des accidents de Schweizerhalle, Seveso ou Toulouse.

Effets prévus

- Libération de gaz toxiques dans l'atmosphère (chlore, dioxine, etc.). La population riveraine (ville de 20 000 habitants) est touchée à raison de z_1 = 10 %, tandis que les personnes se trouvant dans l'entreprise (par ex. effectif de 500 employés) présentent un taux de victimes plus élevé de z_2 = 20 %.
  Parmi les victimes dans la population (sans effectif de l'usine), on dénombre
  1. y_{11} = 1 % de décès
  2. y_{12} = 10 % de cas d'invalidité
  3. y_{13} = 89% de personnes guéries après hospitalisation (frais de guérison, par ex. intoxication par les fumées)

  Parmi les victimes dans l'effectif de l'entreprise, on dénombre

  4. y_{21} = 10 % de décès
  5. y_{22} = 30 % de cas d'invalidité
  6. y_{23} = 60 % de personnes guéries après hospitalisation (frais de guérison, par ex. intoxication par les fumées)

  L'invalidité est motivée par les suites possibles d'une fuite de chlore, par exemple brûlures, dommages irréversibles aux poumons, aux yeux et à la peau. Étant donné que les victimes de l'accident sont aussi bien des employés que des riverains, il est certain que des prestations devront être versées dans les branches accidents LAA et RC.
- Personnes tuées ou blessées par l'explosion exclusivement parmi l'effectif de l'entreprise.
  Branches touchées: LAA, LAA compl.
- Dommages matériels aux installations de l'entreprise: dommage intégral.
  Branche touchée: choses.

- Dommages matériels dans les environs, pollution des eaux (dommage environnemental de longue durée), véhicules et bâtiments endommagés (bris de glace) dans les environs, prétentions en réparation du tort moral (RC).
- Perte de salaire due au fait que l'usine ne peut reprendre la production pendant un certain temps, ou uniquement sous certaines conditions: perte d'exploitation (hypothèse: 4 mois de perte d'exploitation totale).
- Morts ayant souscrit des assurances vie désormais exigibles.

5.2.1.2 Pandémie

Introduction

Le mot pandémie vient du grec «pan» (tout) et «dêmos» (pays, peuple). On entend donc par pandémie la propagation à tout un peuple, à tout un pays, voire à tout le globe, d'une maladie affectant l'ensemble de la population. Le mot épidémie vient du grec «epidêmios» (qui circule dans le pays) et désigne la propagation soudaine et pendant une période limitée d'une maladie contagieuse. A l'inverse, une endémie est une maladie récurrente présente de manière constante dans une région bien délimitée (par ex. la malaria, le goitre). Par définition, une pandémie désigne ici une maladie dont la cause est un nouvel agent pathogène qui se transmet de l'homme à l'homme.

L'Office fédéral de la santé publique donne l'explication suivante[F]:

> Par **épidémie** on entend la propagation, pendant une période limitée, d'une maladie au sein d'une population humaine. Dans le cas de la grippe, le seuil épidémique en Suisse est fixé à 1,5 cas de suspicion de grippe pour 100 consultations médicales.
>
> Par **pandémie** on entend la propagation mondiale d'une maladie. A la différence des épidémies, la maladie n'est pas circonscrite géographiquement. Et comme l'agent pathogène est encore inconnu du système immunitaire humain, la pandémie se répand rapidement et atteint ainsi une grande partie de la population.

La pandémie la plus grave du XXe siècle est la grippe des années 1918/19 que l'on a appelée «grippe espagnole». Son agent pathogène était le virus H1N1 et avec un nombre de victimes estimé entre 20 et 50 millions de morts elle avait été plus meurtrière que la Première Guerre mondiale. Il y a eu d'autres pandémies en 1957/58 («grippe asiatique») et en 1968/69 («grippe de Hong-Kong») qui ont causé à chaque fois la mort d'un million de personnes environ.

Le scénario de pandémie consiste à décrire les effets que pourrait avoir une pandémie de grippe de nos jours. On peut utiliser à cette fin les résultats d'une étude de l'Office fédéral de la santé publique, résultats qui sont récapitulés dans le tableau ci-dessous.

Conséquences biométriques en Suisse

Dans ce scénario, il s'agit de quantifier les conséquences financières pour l'assureur. Les éventuels coûts consécutifs tels que rentes de veuve et d'orphelins doivent aussi être intégrés dans les calculs. Les hypothèses retenues doivent être décrites.

On peut admettre que chaque entreprise d'assurances est touchée proportionnellement à sa part de marché. Ce postulat serait toutefois erroné si l'entreprise a une exposition particulièrement élevée ou faible à certains groupes (par ex. employés des services de santé, personnes à haut risque, etc.).

[F] «Qu'est-ce qu'une pandémie de grippe?» à télécharger sous www.bag.admin.ch/influenza/01120/01132/index.html

	Enfants	Adultes en bonne santé	Adultes en bonne santé	Personnes âgées	Adultes à haut risque	Personnes âgées à haut risque	Profes-sionnels de la santé	Total
		15-49	50-65		15-65	>65		
Population touchée	**1 249 000**	**3 155 000**	**1 080 000**	**700 000**	**383 000**	**328 000**	**269 000**	**7 164 000**
N° de malades déclarés	1 001 136	2 242 890	485 603	228 701	226 314	107 163	173 252	4 465 059
	80%	71%	45%	33%	59%	33%	64%	62%
N° de visites médicales	508 549	966 972	210 059	123 902	128 886	66 497	78 093	2 082 958
	41%	31%	19%	18%	34%	20%	29%	29%
N° d'hospitalisations	2 928	13 287	1 884	2 824	8 317	2 570	1 411	33 221
	0%	0%	0%	0%	2%	1%	1%	0%
N° de journées d'hôpital	20 555	25 592	6 404	25 641	76 694	58 961	8 857	222 704
	2%	1%	1%	4%	20%	18%	3%	3%
N° de décès	4 831	10 295	3 521	3 072	4 995	14 190	1 096	42 000
	0%	0%	0%	0%	1%	4%	0%	1%
N° de jours de travail chômés	0	8 519 486	1 836 142	0	921 977	0	849 512	12 127 117

Personnes à haut risque: patients des maisons de soins, personnes souffrant d'une affection respiratoire chronique, personnes immunodéficientes, femmes enceintes, …

Répercussions sur les marchés financiers

On estime qu'une grave pandémie aurait des répercussions importantes sur les marchés financiers mondiaux: les taux d'intérêt chuteraient, les écarts de taux (*spreads*) se creuseraient et la plupart des monnaies s'affaibliraient contre le franc suisse. Suivant les secteurs économiques, les cours des actions s'effondreraient aussi.

Les affirmations suivantes sont tirées des sources [2] et [3] ci-dessous.

Cours de change
USD: - 0%
EUR: - 0%
GBP: - 0%
JPY: -10%
Autres monnaies asiatiques: -35%
Toutes les autres monnaies des pays émergents: -25%

Taux d'intérêt
Le tableau ci-dessous a été établi sur la base des tableaux 9 et 10 de [3], qui traite de la question des variations des taux d'intérêt. S'agissant des taux suisses et nippons, on peut admettre qu'ils ne deviendraient pas négatifs et que les courbes des durées supérieures à 10 ans seraient plates. Les données indiquées dans le tableau suivant sont les variations des taux d'intérêt en points de base (pb).

Années	CHF	EUR	GBP	USD	JPY
court	-37,0	-37,0	-83,0	-50,0	-38,0
1	-34,0	-34,0	-76,1	-45,8	-35,2
2	-31,0	-31,0	-69,2	-41,6	-32,4
3	-28,0	-28,0	-62,3	-37,4	-29,6
4	-25,0	-25,0	-55,4	-33,2	-26,8
5	-22,0	-22,0	-48,5	-29,0	-24,0
6	-19,0	-19,0	-41,6	-24,8	-21,2
7	-16,0	-16,0	-34,7	-20,6	-18,4
8	-13,0	-13,0	-27,8	-16,4	-15,6
9	-10,0	-10,0	-20,9	-12,2	-12,8
10	-7,0	-7,0	-14,0	-8,0	-10,0
>10	-7,0	-7,0	-14,0	-8,0	-10,0

Variations des écarts de taux (*spreads*)
Nous admettons une hausse généralisée des écarts de taux pour toutes les catégories de débiteurs.

AAA	+75 pb
AA	+100 pb
A	+150 pb
BBB	+200 pb
Junk	+400 pb

Cours actions
Nous supposons que les cours des actions réagiraient très différemment d'un secteur à l'autre. Les arguments sont développés par [2].

Perdants	
Transports:	-50%
Tourisme:	-50%
Biens de luxe:	-25%
Construction:	-25%
Matières premières:	-25%
Produits pétroliers:	-25%
Banques:	-25%
Assurance et réassurance:	-25%
Industrie alimentaire:	-25%
Gagnants	
Industrie pharmaceutique:	+25%
Neutre	
Biens de consommation	0%
Services industriels:	0%
Télécoms et médias:	+0%

Sources des données

[1] The Economics of Pandemic Influenza in Switzerland, prepared by MAPI VALUES for The Swiss Federal Office of Public Health, Division of Epidemiology and Infectious Diseases, Section of Viral Diseases and Sentinel Systems, James Piercy / Adrian Miles, March 2003
[2] Avian Flu, Science, Scenarios and Stock Ideas, Citigroup, Global Portfolio Strategist, 9 March 2006
[3] Global Macroeconomic Consequences of Pandemic Influenza, Warwick J. McKibbin and Alexandra A. Sidorenko, Lowy Institute for International Policy, Sydney, February 2006

5.2.1.3 Accidents (LAA)

Le scénario LAA se décompose en deux parties dont l'une (mouvement de panique au stade) doit uniquement être évaluée et l'autre (accident lors d'une sortie d'entreprise) être intégrée dans le capital cible. Il y a dans les deux cas un dommage cumulatif. Dans le premier cas cependant, le nombre de victimes est très élevé mais chaque assureur n'est touché qu'à raison de sa part de marché. Ce type d'accumulation de dommages est déjà intégré dans le modèle distribué. En revanche, dans le cas de la sortie d'entreprise l'assureur est touché à 100% puisque tous les employés sont couverts par la même police. Ce type d'accumulation de dommages n'est pas couvert par le modèle distribué.

Scénario n° 1: mouvement de panique au stade

Remarque: ce scénario doit être évalué, mais le résultat ne doit pas être intégré dans le capital cible. La raison en est que les dommages cumulatifs qui touchent l'ensemble du marché sont déjà pris en considération dans la distribution de Poisson composée établie pour l'assurance-accidents.

Description: l'effondrement d'un pan de stade provoque un mouvement de panique.

Hypothèses

- Nombre de personnes dans le stade: n = 10 000.
- Parmi ces n personnes x=0,5% deviennent invalides avec un degré d'invalidité de 100%.
- Parmi ces n personnes y=0,5% meurent, la répartition femmes–hommes étant de 50–50.
- Parmi ces n personnes z=24% sont blessées.
- Globalement, un quart des personnes présentes dans le stade subissent donc un dommage corporel puisque $x+y+z$=25%.
- La quote-part de l'entreprise d'assurances est déterminée par sa part sur le marché suisse de l'assurance-accidents (LAA).

Dommages assurés

- Soins, moyens auxiliaires, dommage matériels: 20 000 CHF par personne en moyenne (sans les sinistres mineurs)
- Rentes à vie
    1. Pour chaque invalide, rente d'invalidité avec droit aux allocations de renchérissement. Rente annuelle: 64 000 CHF. Age moyen: 40 ans.
    2. Pour chaque veuve/veuf, rente de veuvage avec droit aux allocations de renchérissement. Rente annuelle: 32 000 CHF. Age moyen: 38 ans pour les femmes, 42 ans pour les hommes.

Autres paramètres à prendre en considération

- Probabilité d'être marié pour une personne décédée → statistiques communes Vie collective.
- Nombre d'enfants ayant droit à une rente en cas de décès et âge de ces enfants → statistiques communes Vie collective.
- Paramètres de calcul des flux de trésorerie des rentes en cours.
- Allocation de renchérissement: le montant nominal de la rente annuelle croît de 1% par an.
- Excédents d'intérêts
- Primes de répartition
- Traitement du fonds de renchérissement
- Coordination avec l'AVS

Chaque entreprise d'assurances est concernée à raison de sa part de marché. Les sinistres les plus importants sur le plan pécuniaire sont les cas d'invalidité. C'est pourquoi le scénario y accorde une attention particulière. Dans ces cas, il faut généralement verser une rente, et les règlements en capital sont quantité négligeable.

Scénario n° 2: accident lors d'une sortie d'entreprise

Description: accident d'autocar où tous les passagers sont assurés contre les accidents auprès de la même entreprise d'assurances. Ce pourrait par exemple être le cas lors d'une sortie d'entreprise dont tous les employés sont assurés selon la LAA. La cause de l'accident est telle qu'aucun recours en responsabilité n'est possible contre l'entreprise de transport (par ex. forces de la nature).

Hypothèses

- 50 personnes étaient à bord de l'autocar.
- 25 d'entre elles deviennent invalides avec un degré d'invalidité de 100%.
- 15 d'entre elles meurent.
- 10 d'entre elles sont blessées.
- Le salaire assuré LAA est de 80 000 CHF en moyenne (max. 106 000 CHF).
- 2 des 50 personnes ont une couverture complémentaire avec une somme d'assurance de 5 mio. de CHF.

Dommages assurés

- Soins, moyens auxiliaires, dommage matériels: 20 000 CHF par personne en moyenne (sans les sinistres bagatelle)
- Rentes à vie
    1. Pour chaque invalide, rente d'invalidité avec droit aux allocations de renchérissement. Rente annuelle: 64 000 CHF. Age moyen: 40 ans.
    2. Pour chaque veuve/veuf, rente de veuvage avec droit aux allocations de renchérissement. Rente annuelle: 32 000 CHF. Age moyen: 38 ans pour les femmes, 42 ans pour les hommes.

5.2.1.4 Grêle

Remarque: ce scénario doit être évalué, mais le résultat ne doit pas être intégré dans le capital cible. La raison en est que les sinistres dus à la grêle sont déjà pris en considération dans une distribution de Poisson composée.

On dispose des «empreintes géographiques» des orages de grêle pour quatre régions:

- Genève
- Berne
- Neuchâtel – Aarau
- Zurich

Ces empreintes sont fournies dans un fichier électronique séparé et comportent chacune une liste de numéros postaux d'acheminement avec les degrés de sinistres correspondants pour les véhicules à moteur, les bâtiments et leur contenu.

5.2.1.5 Invalidité

Le scénario d'invalidité qui doit être évalué dans le SST concerne les assureurs vie. Ils disposent de deux variantes au choix mais ne doivent en évaluer qu'une seule:

- Croissance des cas d'invalidité de 25% durant l'exercice et élévation des cas d'invalidité de 10% sur le long terme.
- Croissance des cas d'invalidité de 25% l'année suivante et accroissement moyen de la durée des invalidités de 1 an (pour les personnes qui ont déjà été invalides 1 an).

5.2.1.6 Indemnité journalière en cas de maladie

- Hausse généralisée de 25% du nombre de bénéficiaires d'une indemnité journalière en cas de maladie
- Doublement des durées de versement d. La limitation de la durée de versement (typiquement 730 jours) peut être prise en compte.

Si, lors de l'évaluation du scénario, la limitation de la durée de versement n'est pas explicitement prise en considération, ce scénario se traduit par une augmentation des prestations annuelles normales d'un facteur de $1{,}25 \cdot 2 = 2{,}5$.

5.2.1.7 Défaillance des réassureurs

Si des couvertures de réassurance passives ont été intégrées dans le calcul du capital cible ou de l'estimation non biaisée des réserves, le risque de crédit qui en découle doit être déterminé à l'aide du scénario de défaillance des réassureurs.

Ce scénario envisage la défaillance des réassureurs. La situation est celle d'une entreprise d'assurances confrontée à un grand sinistre. De plus, les réassureurs traversent une année économiquement difficile qui a entraîné une dégradation de leurs notations de crédit. De nombreux réassureurs sont en défaut de paiement, ce qui les empêche d'honorer (entièrement) leurs obligations.

L'assureur direct subit un dommage qui comporte trois aspects:

- Les réassureurs ne peuvent plus assumer la partie réassurée du grand sinistre qu'il a subi.
- Comme de nombreux réassureurs ont fait défaut, l'assureur direct s'est vu contraint d'acheter de nouvelles couvertures et de payer une nouvelle prime.
- Les réassureurs ne peuvent régler que partiellement les créances en cours de l'assureur direct qui découlent de sinistres antérieurs (quotité de pertes ou *loss given default, LGD*).

La probabilité du scénario est donnée par le produit de la probabilité d'une rétrogradation généralisée ($P[\text{rétrogradation}] = 10\%$) par la moyenne pondérée des probabilités de défaut des réassureurs:

$$P[\text{scénario}] = P[\text{rétrogradation}] \cdot \sum_{i}^{\textit{tous réa}} \tilde{p}_i \cdot \frac{\text{créance}_i + \text{prime}_i}{\sum_j \text{créance}_j + \text{prime}_j}$$

où

- $\tilde{p}_i$ représente la probabilité de défaut du réassureur i après rétrogradation et
- $\text{créance}_i + \text{prime}_i$ est la somme des créances sur le réassureur i et des primes qui lui ont été cédées.

La valeur du scénario est définie par

$$k \cdot (\text{brut} - \text{net}) + k \cdot \sum_j \text{prime}_j + LGD \cdot \sum_j \text{créance}_j$$

où

- $LGD = 0{,}5$ est la part des créances non recouvrables, LGD < 1 signifiant que la défaillance d'une contrepartie n'entraîne pas une perte totale;
- $k = 0{,}5$ est la part du dommage réassuré qui ne peut plus être prise en charge par les réassureurs;
- $\text{brut} - \text{net}$ est un étalon de mesure pour un grand sinistre, défini comme le maximum de
  1. la différence (ES brut) – (ES net) de la distribution des grands sinistres;
  2. la différence (scénario 1 brut) – (scénario 1 net);
  3. ...
  4. la différence (scénario *n* brut) – (scénario *n* net).

Probabilités de défaut idéalisées par catégorie de débiteur

Moody's			S&P			AM Best	
Aaa	0,01%		AAA	0,01%		A++/A+	0,01%
Aa1	0,02%		AA+	0,02%		A/A-	0,15%
Aa2	0,03%		AA	0,03%		B++/B+	0,65%
Aa3	0,04%		AA-	0,04%		B/B-	1,39%
A1	0,05%		A+	0,05%		C++/C+	3,64%
A2	0,07%		A	0,07%		C/C-	8,27%
A3	0,09%		A-	0,09%		D	80%
Baa1	0,21%		BBB+	0,20%			
Baa2	0,34%		BBB	0,34%			
Baa3	0,50%		BBB-	0,43%			
Ba1	0,70%		BB+	0,52%			
Ba2	0,65%		BB	1,16%			
Ba3	2,38%		BB-	2,07%			
B1	3,33%		B+	3,29%			
B2	7,14%		B	9,31%			
B3	11,97%		B-	13,15%			
Caa-C	23,65%		CCC	27,87%			

5.2.1.8 Difficultés financières

Ce scénario est applicable aux assureurs vie et non-vie (y compris assureurs-maladie) et incorpore une combinaison de changements dans l'environnement financier.

- Dévalorisation des actions, de l'immobilier et des *hedge funds* (-30%)
- Hausse des taux d'intérêt de 300 pb (translation de toutes les courbes des taux sans risque pour toutes les monnaies)
- Taux de sorties de 25% durant l'année, puis taux normal
- Contraction des nouvelles affaires de 75%
- Pour les assureurs vie: dans les affaires collectives (LPP), la déduction de rachat n'est plus possible pour les contrats de plus de 5 ans

Si l'entreprise d'assurances est notée et que sa notation de crédit est supérieure à la catégorie dite «spéculative», il faut déterminer les conséquences – sur un an – qu'aurait une rétrogradation dans une catégorie spéculative.

Les catégories spéculatives sont:
Moody's: Ba1, Ba2, Ba3,B1, B2, B3,Caa
S&P: BB+, BB, BB-B+, B, B-, CCC

Parmi les conséquences possibles, les bailleurs de fonds pourraient dénoncer les fonds prêtés au remboursement et les clients exiger des lettres de crédit.

5.2.1.9 Déflation

Ce scénario prévoit l'apparition d'une déflation planétaire. Les taux d'intérêt de toutes les monnaies chutent à des niveaux planchers, qui sont prescrits. Simultanément, le taux de sorties tombe à 0 et la probabilité de l'option de versement du capital passe à 10%.

5.2.1.10 Provisionnement insuffisant

Ce scénario suppose que les réserves pour sinistres doivent être relevées. L'augmentation globale des réserves se monte à 10%. Ce scénario concerne les assureurs non-vie et maladie.

5.2.1.11 Antisélection dans l’assurance-maladie

Ce scénario repose sur l’hypothèse d’une vague de résiliations de la part des assurés juste avant la fin de l’année en cours, dans le sillage d’une forte antisélection: tous les assurés de moins de 45 ans sortent du portefeuille. Cela a des répercussions négatives sur les recettes de primes et sur les prestations de l’année suivante. Les conséquences dépendent fortement de la structure des primes en fonction de l’âge des assurés ainsi que du financement, à savoir dans quelle mesure celui-ci repose sur un système de redistribution ou sur des réserves de vieillissement. Il se peut par exemple que ce scénario entraîne une dissolution des réserves de vieillissement afin de compenser, voire de surcompenser la perte de la réserve mathématique du segment de clientèle ayant résilié les polices. Mais il est aussi possible que la structure tarifaire soit telle que la perte de la réserve mathématique reste contenue.

Le scénario suppose qu’en cas de perte attendue, une réserve soit constituée à ce titre à la fin de l’année en cours.

Pour une année normale avec le portefeuille de client complet, le résultat est

$$E^N = P_{<45} - Ps_{<45} - \Delta RV_{<45} + P_{\geq 45} - Ps_{\geq 45} - \Delta RV_{\geq 45} - F^N$$

tandis que pour une année avec antisélection il est donné par

$$E^S = 0 - 0 - 0 + RV_{<45} + P_{\geq 45} - Ps_{\geq 45} - \Delta RV_{\geq 45} - F^S$$

(toutes les réserves de vieillissement déjà constituées pour les moins de 45 ans $RV_{<45}$ étant libérées). P, Ps et ΔRV sont les primes, les prestations de services et la variation des réserves de vieillissement; F^N et F^S représentent les frais administratifs et d’exploitation dans une année normale et dans une année avec effectif réduit. Il faut encore considérer que F^S comporte des frais fixes qui ne diminuent pas proportionnellement avec l’effectif d’assurés. Le nombre de salariés et les frais de bureau ne peuvent par exemple pas être réduits instantanément, mais après quelques mois seulement. Pendant cette période, les coûts antérieurs subsistent.

Dans ce cas, la valeur du scénario est donnée par

$$E^S - E^N = RV_{<45} - (P_{<45} - Ps_{<45} - \Delta RV_{<45} - F^N + F^S)$$

Ce résultat, comparé à celui d’une année normale, est minoré du montant qui correspond aux primes moins les prestations de services et la variation des réserves de vieillissement des assurés sortants, puis majoré des réserves de vieillissement déjà constituées pour les assurés sortants.

5.2.1.12 Terrorisme

Parmi tous les scénarios proposés ici, il faut choisir celui qui pourrait le plus vraisemblablement être provoqué par un attentat terroriste et pour lequel une couverture serait tout de même garantie. L’ampleur du scénario terroriste est de même ampleur que le scénario *i*.

5.2.1.13 Risques financiers historiques

Les événements suivants sont examinés:

- Krach boursier de 1987
- Effondrement du Nikkei en 1989
- Crise monétaire européenne de 1992
- Crise des taux d’intérêt américains de 1994
- Crise russe et déconfiture LTCM en 1998
- Krach boursier de 2000

Chacun de ces scénarios est décomposé en plusieurs facteurs de risque qui sont visibles dans le *SST Template* (feuille de tableur Excel) et sont automatiquement calculés dans le modèle standard. Les effets de chacun des facteurs de risque peuvent toutefois être corrigés manuellement.

5.2.1.14 Risque de longévité pour les assureurs vie

Dans ce scénario, on suppose que la mortalité régresse deux fois plus vite que prévu. On admet que la mortalité est normalement donnée par la formule suivante:

$$q_{x,t} := q_{x,t_0} \cdot e^{-\lambda_x (t-t_0)}$$

Dans le scénario du risque de longévité, cette formule devient

$$q_{x,t} := q_{x,t_0} \cdot e^{-2\lambda_x (t-t_0)}$$

Si l'entreprise utilise des tables de génération qui repose sur une autre formule d'extrapolation de la mortalité, celles-ci doivent être modifiées par analogie.

5.3 Combinaison de la distribution avec les scénarios

Le modèle distribué et les scénarios envisagent chacun une partie de la totalité des risques. Le but est bien entendu de réunir ces deux points de vue afin d'analyser tous les risques dans une distribution globale. Tel est le but de la méthode d'agrégation que nous allons décrire.

5.3.1 Méthode d'agrégation

Pour simplifier, nous supposons qu'un scénario au plus se réalisera en 2005, et une fois au maximum. Cette approximation est acceptable dans la mesure où nous avons admis que les scénarios étaient rares et où le nombre de scénarios n'est pas élevé.

Définissons les événements suivants:

S_k	le scénario *k* avec $1 \le k \le m$ se réalise
S_0	aucun des scénarios S_1 à S_m ne se réalise

Définissions également les probabilités suivantes:

$p_0 := P(S_0)$	probabilité qu'aucun scénario ne se réalise
$p_k := P(S_k)$	probabilité que le scénario S_k se réalise ($1 \le k \le m$)

Ces probabilités sont spécifiées au paragraphe 4.5 de la documentation sur les scénarios.

Selon l'approximation faite ci-dessus, les scénarios s'excluent mutuellement. Il s'ensuit que

$$p_0 = 1 - (p_1 + p_2 + ... + p_m) \qquad (60)$$

où $p_1 + p_2 + ... + p_m$ est la probabilité que n'importe lequel des *m* scénarios se réalise.

L'évaluation des scénarios donne, pour chaque scénario S_j, l'ampleur de ses conséquences c_j sur le capital porteur de risque:

$$c_j := E[CR(1)(\text{scénario se réalise}) - CR(1)(\text{scénario ne se réalise pas})], \qquad j=1,...,m$$

En règle générale, les scénarios ont pour effet de réduire le capital porteur de risque, si bien que les valeurs c_j sont négatives.

Dans le SST, une année au cours de laquelle aucun scénario ne se réalise est appelée «année normale». La fonction de distribution de la variation du capital porteur de risque pour une année normale est

$$F_0(x) := P\left(\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0) \leq x \middle| S_0 \right) \tag{61}$$

Cette fonction est le résultat du modèle distribué.

5.3.2 Translation de la distribution

Postulons que la fonction de distribution avec le scénario S_j soit

$$F_j(x) := P\left(\frac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0) \leq x \middle| S_j \right) = F_0(x - c_j), \qquad j = 1,\ldots,m \tag{62}$$

Cette approche repose sur le constat qu'en cas de réalisation d'un scénario, par exemple un accident industriel avec une charge de sinistres de 100 mio. de CHF, toutes les variations possibles du capital porteur de risque (Δ_{CR}) sont inférieures de 100 mio. de CHF par rapport au Δ_{CR} d'une année normale. Mais cette hypothèse n'est pas toujours valable. Si le scénario a des répercussions sur d'autres facteurs de risque, cela entraîne non seulement une translation mais également une déformation de la fonction de distribution. Nous en ferons cependant abstraction par souci de simplification.

La distribution de Δ_{CR} en cas de réalisation du scénario S_j est ainsi la distribution de Δ_{CR} sans scénario, translatée de la valeur c_j.

5.3.3 Agrégation

L'agrégation des scénarios et de l'année normale se fait en calculant la fonction de distribution globale de Δ_{CR} à partir des fonctions de distribution des scénarios et de l'année normale, soit

$$F(x) = \sum_{j=0}^{m} p_j \cdot F_j(x) = \sum_{j=0}^{m} p_j \cdot F_0(x - c_j) \tag{63}$$

Cette fonction de distribution globale peut être calculée pour un ensemble de points de référence, puisque l'on connaît la valeur numérique de la fonction de distribution $F_0(x)$ et par conséquent de $F_j(x)$. On peut ensuite déterminer la *VaR* et l'*ES* de $F(x)$ au niveau de sécurité α .

On peut démontrer que cette démarche aboutit à la même distribution que la distribution de la somme

- des variables aléatoires continues du modèle distribué et
- des variables aléatoires, indépendantes et discrètes S de $P(S=c_i)=p_i$ pour $i=0,\ldots,m$.

L'intuition qui a amené à cette approche est que la distribution globale de Δ_{CR} peut aussi être obtenue par une simulation Monte Carlo. A cette fin, on prend un échantillon de l'ensemble « Δ_{CR} sans scénario» et un autre échantillon, indépendant du premier, de l'ensemble des scénarios S_0 à S_m dont les valeurs sont $c_0,\ldots, c_m$. La variation globale du capital porteur de risque est la somme des deux échantillons. De plus, ce raisonnement montre que $F(x)$ peut aussi être calculée simplement par produit de convolution des deux variables aléatoires Δ_{CR} et S .

5.3.4 Double comptabilisation des risques

Avec la méthode d'agrégation, les risques présents à la fois dans le modèle distribué et dans les scénarios sont comptabilisés deux fois, ce qui entraîne un résultat trop élevé de la mesure du risque.

Pour prévenir cette double comptabilisation des risques, seuls les scénarios dont les risques ne sont pas représentés dans le modèle distribué doivent être inclus dans l'agrégation.

Il existe toutefois d'autres motifs pour lesquels il convient malgré tout d'évaluer ces scénarios dont l'agrégation entraînerait une double comptabilisation des risques.

En effet, les scénarios sont très instructifs et peuvent être utilisés pour

- démontrer à d'autres services l'importance d'un risque;
- étayer la représentation du risque dans le modèle distribué, puisque les scénarios livrent des informations supplémentaires.

5.3.5 Agrégation des scénarios dans une distribution normale

Si la distribution cumulée $F_0(x)$ est rendue discrète par des points de référence, les valeurs de la fonction $F(x)$ doivent aussi être calculées en ces points.
Si $F_0(x)$ est une distribution normale, le processus peut être abrégé. Ce raccourci est intégré dans le *SST Template* (feuille de tableur Excel) pour les assureurs maladie et vie.

Il faut d'abord déterminer le quantile α (ou *VaR*) de $F(x)$. Nous désignerons cette valeur par q. Cette étape peut par exemple se faire à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. On peut alors représenter l'*expected shortfall* de $F(x)$, soit $ES = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{q} x \cdot f(x)dx$ comme la somme des scénarios, grâce à la formule (63) où $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$. En effet, $f(x) = \sum_{j=0} p_j \varphi_{c_j,\sigma}(x)$, d'où

$$ES = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{m}\left(p_j \int_{-\infty}^{q} x \cdot \varphi_{c_j,\sigma}(x)dx \right)$$

$\varphi_{c_j,\sigma}(x)$ est la fonction de densité de la distribution normale dont l'espérance mathématique est c_j et l'écart-type σ. Les valeur de l'intégrale sont données à l'annexe 8.6.1 par

$$\int_{-\infty}^{q} x \cdot \varphi_{c_j,\sigma}(x)dx = -\sigma^2 \cdot \varphi_{c_j,\sigma}(q) + c_j \cdot \Phi_{c_j,\sigma}(q)$$

Ce qui donne, pour l'*expected shortfall*

$$ES = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{m} p_j\left(-\sigma^2 \cdot \varphi_{c_j,\sigma}(q) + c_j \cdot \Phi_{c_j,\sigma}(q)\right)$$

La somme peut être calculée par n'importe quel système informatique capable d'évaluer la distribution normale cumulée $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$. Il est également utile de se souvenir que q n'est pas le quantile α de $\Phi_{c_j,\sigma}$ mais de $F(x)$. Pour cette raison $\Phi_{c_j,\sigma}(q) \neq \alpha$.

6. Marge sur la valeur de marché

6.1 Introduction

La marge sur la valeur de marché, ou *market value margin* (MVM), d'une position est définie comme la différence entre la valeur proche du marché et l'espérance mathématique du flux de trésorerie de cette position. Pour de nombreuses positions financières telles que les actions ou les obligations, la valeur de marché est connue puisque ces actifs font l'objet d'un négoce. Dans ce cas, la marge sur la valeur de marché est implicitement incluse dans le prix et n'est donc d'aucun intérêt pour le SST.

Les passifs techniques ont quant à eux une valeur de marché que l'on ne peut pas relever et des flux de trésorerie dont l'espérance mathématique peut seulement être estimée. C'est pourquoi, lorsqu'on veut calculer la valeur de marché d'une position actuarielle, il faut d'abord modéliser la marge sur la valeur de marché.

Lorsqu'un portefeuille est en liquidation (*run-off*), l'assuré ne subit aucun dommage si un tiers prend en charge le risque inhérent au portefeuille en liquidation. Tel est le cas lorsque l'assureur dispose d'un capital porteur de risque suffisant pour supporter le risque, ou lorsqu'une instance extérieure (un autre assureur, un investisseur, un bailleur de fonds) reprend le portefeuille ou injecte du capital dans l'entreprise – ce qui revient au même. Dans le deuxième cas, l'instance extérieure doit mettre du capital-risque à disposition pour la liquidation. Elle sera prête à le faire en contrepartie d'une indemnisation.

Le prix d'un passif technique se compose donc d'un montant correspondant à sa liquidation attendue et d'une indemnisation pour le risque encouru, indemnisation dont la définition recoupe parfaitement celle de la marge sur la valeur de marché donnée ci-dessus.

Le modèle utilisé pour déterminer la marge sur la valeur de marché d'un portefeuille incluant des passifs techniques repose sur l'idée que la marge sur la valeur de marché se compose de frais financiers ou de dividendes qui, d'un point de vue strictement mathématique, comportent une part sans risque $r_1^{(0)}$ et une part exposée au risque i_{spread} (écart de taux), lequel a été fixé à 6%.

La notion de marge sur la valeur de marché est valable en tout temps. En règle générale, on veut connaître la valeur de marché actuelle, soit en t_0. Dans le SST c'est surtout à la valeur en fin d'année, soit en t_1, que l'on s'intéresse. Nous traiterons donc la marge sur la valeur de marché sous cet angle.

Selon le schéma décrit ci-dessus, le bailleur de capital va mettre à disposition le capital risque C_{t_1} en t_1, s'il reçoit en contrepartie un dividende $\left(r_1^{(0)} + i_{spread}\right) \cdot C_{t_1}$. Le capital risque peut être placé sans risque pour une durée d'un an et génère ainsi la part $r_1^{(0)} \cdot C_{t_1}$. Il est donc suffisant que le montant supplémentaire $i_{spread} \cdot C_{t_1}$ soit disponible. Celui-ci est prélevé de la marge sur la valeur de marché. Et il en va de même pour les années suivantes.

Il est important de comprendre que la marge sur la valeur de marché doit indemniser le repreneur pour les risques techniques, mais pas pour tous les risques encourus. Imaginons un portefeuille qui se compose d'une part de passifs techniques et d'autre part d'instruments existants (actifs) qui répliquent au mieux les passifs. Pour un portefeuille non-vie, ce pourraient par exemple être des emprunts souverains générant le flux de trésorerie attendu des passifs. La marge sur la valeur de marché ne doit indemniser que les risques de ce portefeuille. En revanche, elle ne doit pas couvrir les risques de marché du portefeuille d'actifs existant, dont la composition est généralement différente de ce qu'elle serait dans un portefeuille de réplication optimale.

Prenons trois exemples simples pour illustrer ce raisonnement.

6.1.1 Exemple A

Dans le premier exemple, nous avons pour actif une action et pour passif l'obligation de verser 100 CHF dans 10 ans. Admettons aussi, pour simplifier, que le passif n'inclut aucun risque technique. Premièrement, il est clair que l'espérance mathématique actualisée du passif est $100/(1+r_{10})^{10}$, soit la valeur actuelle d'un règlement sûr dans 10 ans. Deuxièmement, cette valeur correspond à la valeur de marché, car le passif peut être considérée comme un emprunt à coupon zéro «négatif» (que l'on désignerait par position courte ou *short position* dans un véritable emprunt à coupon zéro). Vu que dans cet exemple l'espérance mathématique actualisée est égale à la valeur de marché, la marge sur la valeur de marché est nulle.

Il est vrai que la partie qui achète ce «paquet» encourt un risque de marché, celui de voir fluctuer le cours de l'action et les taux d'intérêt. Ne devrait-elle donc pas être indemnisée par une marge sur la valeur de marché? La réponse est négative pour deux raisons.

- L'action peut être vendue et un emprunt à coupon zéro être acheté à sa place. Le portefeuille acquis se composerait alors d'un emprunt à coupon zéro et d'un passif consistant en un emprunt à coupon zéro négatif. Les deux positions du portefeuille s'annuleraient donc et il n'y aurait plus de risque. De ce fait, une marge sur la valeur de marché indemnisant la prise de risque est superflue.
- Si l'acquéreur du portefeuille décide de conserver l'action, il endosse le risque de marché évoqué précédemment. Ce risque est déjà intégré dans le prix de l'action et dans le prix actualisé du passif car, d'une part, la valeur de marché de l'action inclut déjà le risque de fluctuation de la valeur du titre et, d'autre part, l'indemnisation du risque d'intérêt est, elle aussi, déjà incluse dans la valeur actualisée du passif.

6.1.2 Exemple B

A l'instar du premier exemple, le deuxième comporte aussi un passif technique sans risque et un placement à risque. Dans cet exemple, nous admettons toutefois que ce placement n'est pas liquide, ce qui veut dire que l'actif ne peut être aliéné immédiatement. Le repreneur se voit donc contraint d'assumer le risque pendant un certain temps. Pourtant, il n'a pas à être indemnisé par une marge sur la valeur de marché du passif puisque, comme dans l'exemple précédent, la valeur de marché du placement comprend déjà l'indemnisation du risque de marché.
De plus, l'illiquidité de l'actif est intégrée dans la valeur de marché par le biais d'une décote. En effet, deux emprunts ayant les mêmes caractéristiques hormis leur liquidité auront des valeurs de marché différentes: celle du titre le moins liquide sera inférieure à celle du plus liquide.

6.1.3 Exemple C

Le troisième exemple se compose d'un passif technique dont le risque d'intérêt ne peut pas être compensé par des instruments financiers (emprunts, dérivés). La cause peut être qu'il n'existe pas d'emprunt correspondant, pour un règlement devant intervenir dans très longtemps, ou qu'une option intégrée dans le passif est tributaire de la courbe des taux d'intérêt mais ne peut être reproduite par réplication. Dans les deux cas, le passif recèle un risque d'intérêt inévitable ou incompressible.
Le repreneur doit être indemnisé pour ce risque incompressible et comme aucune autre valeur n'inclut cette indemnisation, celle-ci doit faire partie de la marge sur la valeur de marché.

Ces trois exemples montrent que la marge sur la valeur de marché sert à indemniser celui qui prend des risques de nature technique ou des risques de marché inclus dans les passifs, qui ne peuvent être reproduits par réplication à l'aide d'autres instruments financiers.

6.2 Définition de la marge sur la valeur de marché

Sur la base de l'écart de taux d'intérêt (*spread*) et du capital risque nécessaire chaque année après t_1, l'on peut définir ainsi la marge sur la valeur de marché:

$$\frac{MVM}{1+r_1^{(0)}} := i_{spread} \cdot \left(\frac{C_{t_1}}{(1+r_1^{(0)})} + \frac{C_{t_1+1an}}{(1+r_2^{(0)})^2} + \frac{C_{t_1+2ans}}{(1+r_3^{(0)})^3} + \ldots \right).$$

Soulignons que la marge sur la valeur de marché n'appartient pas au bailleur de capital risque mais à l'assuré. Le bailleur de capital risque peut simplement prétendre annuellement au versement du dividende

$$i_{spread} \cdot C_t$$

prélevé sur la totalité de la marge sur la valeur de marché.

6.3 Futurs risques annuels

La question qui se pose est comment peut-on calculer individuellement les futurs risques annuels de C_t ($t = t_0 + 1$ an,+2 ans,+3 ans,...). Soit on envisage pour chaque année à venir la totalité des risques avec leurs distributions de probabilité, ce qui revient quasiment à réaliser un SST pour chaque année future, soit on approxime les C_t de manière appropriée. On peut simplifier en retenant comme hypothèse que les risques de C_t sont proportionnels à une autre grandeur p_t dont on connaît mieux l'évolution historique, comme les réserves résiduelles. D'autres modèles sont bien sûr possibles. Dans les assurances vie on peut par exemple penser à la somme d'assurance, à l'espérance mathématique des règlements en cas de décès ou au nombre attendu de cas d'invalidité, etc.

Partant de cette hypothèse, on obtient

$$C_t = \frac{p_t \cdot C_0}{p_0}$$

Pour approfondir la thématique de la marge sur la valeur de marché, nous renvoyons le lecteur aux documents suivants, qui peuvent également être téléchargés sur le site de l'OFAP à l'adresse http://www.bpv.admin.ch/themen/00506/00552/00727/:
«A Primer for Calculating the SST Cost of Capital Risk Margin»
«The Swiss Experience with Market Consistent Technical Provisions - the Cost of Capital Approach»

7. Références

SST 2006 Marktrisikomodell, http://www.bpv.admin.ch/themen/00506/00552

Beschreibung des Inputs für die Sensitivitäten im Marktrisikomodell für den SST Feldtest 2006, http://www.bpv.admin.ch/themen/00506/00552

M. Buchwalder, M. Merz, H. Bühlmann, M. V. Wüthrich: Estimation of Unallocated Loss Adjustment Expenses, Mitteilungen der SAV, Heft 1/2006, Teil D.

International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, Juni 2004, Basel Committee on Banking Supervision, BIS

A Primer for Calculating the SST Cost of Capital Risk Margin“, http://www.bpv.admin.ch/themen/00506/00552/00727/

The Swiss Experience with Market Consistent Technical Provisions - the Cost of Capital Approach, http://www.bpv.admin.ch/themen/00506/00552/00727/

The Economics of Pandemic Influenza in Switzerland, prepared by MAPI VALUES for The Swiss Federal Office of Public Health, Division of Epidemiology and Infectious Diseases, Section of Viral Diseases and Sentinel Systems, James Piercy / Adrian Miles, March 2003

Avian Flu, Science, Scenarios and Stock Ideas, Citigroup, Global Portfolio Strategist, 9 March 2006

Global Macroeconomic Consequences of Pandemic Influenza, Warwick J. McKibbin and Alexandra A. Sidorenko, Lowy Institute for International Policy, Sydney, February 2006

8. Annexes

8.1 Notations

α	Niveau du quantile $0 < \alpha < 1$ qui tend vers 0. Actuellement, et très probablement dans le futur aussi, $\alpha = 1\%$.
$1-\alpha$	Niveau de sécurité ou de confiance du SST qui tend vers 1.
t	Temps. Dans le présent document, nous désignons par t_0 le début de l'année en cours (1er janvier, 00h00) et par t_1 la fin de la même année (31 décembre, 24h00).
CR(t)	Capital porteur de risque (ou capital disponible) en *t*.
CC	Capital cible, soit le capital porteur de risque nécessaire en t_0.
MVM	Marge sur la valeur de marché ou *market value margin* des passifs, approximée par la valeur actuelle des frais financiers du capital cible futur pour le portefeuille en liquidation.
$(r_j^{(0)} \equiv 0, r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, ...)$	Courbe actuelle des taux d'intérêt sans risque: rendement sans risque en t_0 pour des durées de 0, 1, 2,... ans.
$v_j^{(0)} = \dfrac{1}{(1+r_j^{(0)})^j}$	Facteur d'actualisation pour la détermination de la valeur actuelle en t_0 d'un règlement devant intervenir en $t_0 + j$ ans.
$(R_j^{(1)} \equiv 0, R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, ...)$	Courbe des taux d'intérêt sans risque à la fin de l'année: rendement sans risque valable en t_1 pour des durées de 0, 1, 2, ... ans. Dans la perspective de t_0, les $R_j^{(1)}$ sont des variables aléatoires.
$\mathrm{V}_{\mathrm{j}}^{(1)} = \dfrac{1}{(1+R_J^{(1)})^j}$	Variable aléatoire du facteur d'actualisation pour la détermination de la valeur actuelle en t_1 d'un règlement devant intervenir en $t_1 + j$ ans. Dans la perspective de t_0, les $\mathrm{V}_{\mathrm{j}}^{(1)}$ sont des variables aléatoires.
$A(t)$	Valeur de marché des actifs en t. Dans le SST, seuls t_0 et t_1 sont considérés.
$L(t)$	Estimation non biaisée de la valeur actualisée des passifs en t.
R_I	Variable aléatoire représentant le rendement des placements durant l'année en cours.
Δ_{CR}	Différence $\dfrac{CR(1)}{1+r_1^{(0)}} - CR(0)$. A noter que, dans le SST, la différence $CR(1) - CR(0)$ n'est pas utilisée.

8.2 Vie: le capital cible durant une année normale

Le capital cible, désigné par *CC*, est défini comme l'*expected shortfall* (ES) de la différence entre le capital porteur de risque $CR(1)$ et le capital porteur de risque $CR(0)$ où $CR(t) = A(t) - L(t)$. $A(t)$ désigne ici la valeur proche du marché des actifs en t et $L(t)$ l'estimation non biaisée des passifs en t (ch. 1.2). L'instant $t = 0$ est le 1er janvier et $t = 1$ le 31 décembre.

Nous désignons par $Z(t) = (Z^1(t), Z^2(t), \ldots, Z^d(t))$ le vecteur des facteurs de risque en t. Nous admettons aussi que

$$CR(t) = f\big(Z(t)\big)$$

où *f* est une fonction ne dépendant pas explicitement du temps.

Soit encore $X(t) = Z(t) - Z(t-1)$ où le vecteur $X(t)$ désigne la variation des facteurs de risque entre $t-1$ et t. Nous pouvons ainsi écrire

$$\begin{aligned} CR(1) &= f\big(Z(1)\big) \\ &= f\big(Z(0) + Z(1) - Z(0)\big) \\ &= f\big(Z(0) + X(1)\big) \\ &\approx f\big(Z(0)\big) + \nabla f\big(Z(0)\big) \cdot X(1) \\ &= CR(0) + \nabla f\big(Z(0)\big) \cdot X(1) \end{aligned}$$

D'où:

$$CR(1) - CR(0) \approx \nabla f\big(Z(0)\big) \cdot X(1)$$

et pour le capital cible:

$$CC = \mathrm{ES}\big[CR(1) - CR(0)\big] \approx \mathrm{ES}\big[\nabla f\big(Z(0)\big) \cdot X(1)\big]$$

Plus la déviation $X(1)$ est faible, meilleure est l'approximation (linéaire).

Posons $b = \nabla f\big(Z(0)\big) = \big(\partial CR(0)/\partial x^1, \ldots, \partial CR(0)/\partial x^d\big)$. La grandeur $\partial CR(0)/\partial x^j$ désigne la variation relative (sensibilité) du capital porteur de risque $CR(0)$ en $t = 0$ par unité de déviation du facteur de risque x^j.

Conformément aux directives SST, on admet que le vecteur $X(1)$ a une distribution normale multivariée dont la valeur moyenne est $\mu = 0$ et dont la matrice de covariance Σ est donnée par $\Sigma = \Delta\, R\, \Delta$, où $R = \big(\rho_{ij}\big)_{i,j}$ représente la matrice de corrélation qui détermine la structure linéaire de dépendance entre les facteurs de risque, et où $\Delta = \mathrm{diag}\big(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{dd}\big)$ est la matrice diagonale composée des écarts-types des variations des facteurs de risque. Les matrices *R* et Δ sont prédéfinies par l'instance de surveillance.

Puisque la distribution du vecteur $X(1)$ est normale et multivariée, la distribution du produit $b' X(1)$ est normale et univariée avec une valeur moyenne de $\mu = 0$ et une variance $b'\Sigma b$. L'*expected shortfall*, et par conséquent le capital cible, peuvent ainsi être calculés de manière explicite comme

$$CC = \mathrm{ES}\left[b' X(1) \right] = \frac{\sqrt{b'\Sigma\, b}}{\alpha} \varphi(q_\alpha(Z))$$

où φ désigne la fonction de densité de la distribution normale standard univariée et $q_\alpha(Z)$ le quantile α d'une variable aléatoire *Z* standard normalement distribuée. Notons encore que pour $\alpha = 0{,}01$ nous avons $q_\alpha(Z) = -2{,}3263$ et $\varphi(q_\alpha(Z)) = 0{,}026652$ d'où

$$\frac{\varphi(q_\alpha(Z))}{\alpha} = 2{,}6652$$

La démarche décrite ci-dessus détermine le régime standard dans la branche vie.

8.3 Exemple de calcul des risques financier et technique pour un assureur vie

L'exemple suivant est une représentation fortement simplifiée du modèle décrit précédemment et sert en tout premier lieu à illustrer le mécanisme du modèle standard. On suppose notamment que la conversion du bilan statutaire au bilan à la valeur de marché (*marked to market*) a déjà été opérée.

8.3.1 Situation initiale

Il faut déterminer le capital cible de l'entreprise d'assurances dont le bilan à la valeur de marché est donné ci-dessous. Outre le capital cible (analytique) déterminé par les sensibilités ci-après, il faut aussi prendre en considération les scénarios de pandémie et d'invalidité. Les sensibilités données pour les trois facteurs de risque taux d'intérêt, actions et taux de sorties sont:

- Taux d'intérêt (+/- 1 pb)
- Actions (+/- 10%)
- Taux de sorties (+/- 10% de l'estimation non biaisée)

8.3.2 Phase 0: établissement du bilan à la valeur de marché

	Poste	Valeur	Durée (années)
Actifs	Actions	10	-
	Obligations	90	5
Passifs	Réserves	80	10
	Sinistres non déclarés (*IBNR*)	5	0
	Capital porteur de risque	15	

8.3.3 Phase 1: calcul des sensibilités

Sensibilités du capital porteur de risque

Facteur de risque	Valeur	Commentaire
Taux d'intérêt	+ 0,035	pour une variation du taux de +1 pb (perte de 4,5 sur les obligations, gain de 8 sur les réserves, +0 pour les *IBNR*)
Actions	+ 0,1	pour une variation de l'indice d'actions de +1%
Taux de sorties	- 0,05	pour une variation du taux de +10%, par exemple de 2% à 2,2% p.a.

La «valeur» est déterminée par les entreprises.

8.3.4 Phase 2: définition des déviations (volatilités) des facteurs de risque

Cette opération nécessite un calibrage minutieux (cf. appendice) car l'hypothèse de la distribution normale, pour les taux d'intérêt par exemple, n'est clairement pas remplie. Pour l'exemple chiffré, nous retenons les déviations suivantes, qui correspondent à un *expected shortfall* de 1%. Les déviations sont prescrites par l'OFAP.

Facteur	Déviation	Déviation du CR en CHF
Taux d'intérêt	125 pb	4,375
Actions	25 %	2,5
Taux de sorties	100 %	-0,5

Explication: $4{,}375\,\mathrm{CHF} = 0{,}035\dfrac{\mathrm{CHF}}{pb}\cdot 125\ pb$

8.3.5 Phase 3: détermination de la variance et de la matrice de covariance Σ

La matrice de corrélation R est prescrite par l'OFAP. Admettons pour le présent exemple:

	Taux d'intérêt	**Actions**	**Taux de sorties**
Taux d'intérêt	1	-0,25	0
Actions	-0,25	1	0
Taux de sorties	0	0	1

Partant de R et des déviations, on calcule la matrice de covariance:

$$\Sigma = \Delta\, R\, \Delta$$

où

$$\Delta = \text{diag}(125\ ;\ \ 0{,}025\ ;\ \ 1) = \begin{pmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}025 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.3.6 Phase 4: calcul du capital cible sur la base des sensibilités, soit sans scénarios

Calcul du capital cible (analytique) selon l'approche variance-covariance:

$$CC = 2{,}6652 \cdot \sqrt{b'\,\Sigma\, b} = 4{,}49$$

où $b = (0{,}035,\, 0{,}1,\, -0{,}05)$

8.4 Remarques sur la modélisation pour les assureurs non-vie

8.4.1 Répartition entre les branches non-vie

Numéro	Désignation	Détail
1	RCvm	Assurance RC des véhicules à moteur
2	Cvm	Assurance casco des véhicules à moteur, excepté les dommages consécutifs à des phénomènes naturels de grande ampleur
3	Choses	Assurance incendie Assurance dommages naturels Assurance construction Assurance entreprise Assurance machines Assurance contre le vol Assurance ménage Autres assurances couvrant les dommages matériels
4	RC	Assurance RC bâtiment Assurance RC privée Assurance RC d'entreprise Assurance RC du maître d'œuvre Assurance RC générale
5	LAA	Assurance accidents professionnels obligatoire Assurance accidents non professionnels obligatoire Assurance complémentaire facultative selon LAA
6	Accidents sans LAA	Assurance-accidents individuelle Assurance complémentaire à la LAA Assurance-accidents des occupants Autres assurances-accidents collectives
7	Maladie collective	Assurance-maladie collective
8	Maladie individuelle	Assurance-maladie individuelle
9	Transport	Assurance transport Assurance casco des véhicules ferroviaires Assurance casco des embarcations Assurance RC des embarcations
10	Aviation	Assurance casco des aéronefs Assurance RC des aéronefs
11	Financement et cautionnement	Assurance de crédit Assurance de cautionnement Assurance de garantie de l'entrepreneur Assurances contre les pertes pécuniaires
12	Protection juridique	Assurance de protection juridique
13	Autres	Assurance touristique et de voyage Assurance contre les épidémies

Tableau: Définition des types de sinistres modélisés.

8.4.2 Matrice de corrélation des branches pour les petits sinistres AC

La matrice de corrélation suivante ($\rho_{i,j}$) est applicable dans le modèle standard:

	RCvm	Cvm	Choses	RC	LAA	Acc. sans LAA	Maladie collec-tive	Maladie indivi-duelle	Trans-port	Avia-tion	Finance-ment + caution-nement	Protec-tion juri-dique	Autres
RCvm	1	0,5		0,25	0,25	0,25							
Cvm	0,5	1	0,25										
Choses		0,25	1	0,25									
RC	0,25		0,25	1									
LAA	0,25				1	0,5	0,5						
Accidents sans LAA	0,25				0,5	1	0,5						
Maladie collective					0,5	0,5	1	0,25					
Maladie individuelle							0,25	1					
Transport									1				
Aviation										1			
Financement et cautionnement											1		
Protection juridique												1	
Autres													1

Tableau: Matrice de corrélation des petits sinistres.

8.4.3 Coefficients de variation du risque paramétrique pour les petits sinistres AC

Les valeurs standard suivantes ont été fixées pour les $CV_{p,i}$ sur la base de l'évaluation des statistiques communes:

Branche	Coefficient de variation du risque paramétrique
RCvm	3,50%
Cvm	3,50%
Choses	5,00%
RC	3,50%
LAA	3,50%
Accidents sans LAA	4,75%
Maladie collective	5,75%
Maladie individuelle	5,75%
Transport	5,00%
Aviation	5,00%
Financement+cautionnement	5,00%
Protection juridique	5,00% (provisoire)
Autres	4,50%

Tableau: Coefficients de variation du risque paramétrique.

8.4.4 Coefficients de variation du risque aléatoire pour les petits sinistres AC

Ce tableau donne un aperçu des coefficients de variation standard prescrits pour calculer le risque aléatoire dans les différentes branches, selon le seuil de grand sinistre choisi par l'entreprise (1 ou 5 mio. de CHF).

Branche	**Coefficient de variation**	
	Seuil de grand sinistre = 1 mio.	**Seuil de grand sinistre = 5 mio.**
RCvm	7	10
Cvm	2,5	2,5
Choses	5	8,
RC	8	11
LAA	7,5	9,5
Accidents sans LAA	4,5	5,5
Maladie collective	2,5	2,5
Maladie individuelle	2,25	2,25
Transport	6,5	7
Aviation	2,5	3
Finance +cautionnement	5	5
Autres	5	5

Tableau 5: Coefficients de variation pour les montants individuels des sinistres.

8.4.5 Dérivation des coefficients de variation de la charge annuelle des petits sinistres

8.4.5.1 Risque paramétrique et risque aléatoire

Pour les petits sinistres, la charge annuelle de sinistres S d'une branche d'assurance est définie par l'espérance mathématique $E[S]$ et le coefficient de variation $CVar(S)$. La variabilité de la charge annuelle de sinistres peut être décrite par la somme des influences

- du risque paramétrique et
- du risque aléatoire (ou risque stochastique).

Le risque paramétrique de la charge de sinistres S décrit la variabilité ou l'incertitude des paramètres de distribution. Ces paramètres sont incertains soit parce que leur estimation n'est pas sûre (aucune base statistique) soit parce qu'ils changent d'année en année sous l'influence de facteurs externes. Ce phénomène touche pratiquement toutes les entreprises d'assurances de la même manière.
Exemple: l'espérance mathématique du nombre d'accidents de la circulation routière dépend des températures durant l'été. Un été chaud occasionne un trafic de loisirs plus intensif qu'une autre année, ce qui entraîne automatiquement une augmentation de l'espérance mathématique du nombre d'accidents. Au début de l'année, lorsque cette espérance mathématique doit être estimée, ce facteur externe n'est pas encore connu. L'estimation est donc affectée d'une incertitude qui ne peut pas être atténuée par effet de diversification et qui concerne ainsi les grandes comme les plus petites entreprises d'assurances. Dans le SST, nous désignons la totalité de ces facteurs externes et incertitudes par la caractéristique de risque Θ (cf. illustration ci-dessous). Θ est une variable aléatoire.

Le risque stochastique ou aléatoire décrit l'incertitude quant au montant de la charge annuelle de sinistres lorsque la caractéristique de risque Θ (facteurs externes, paramètres de distribution) est connue. Il répond donc à la question de savoir comment se comporte la variable aléatoire du nombre d'accidents de la circulation pour un été chaud.

Pour introduire formellement le risque paramétrique et le risque aléatoire, observons tout d'abord la situation d'une variable aléatoire générale S . Dans un deuxième temps, S représentera la charge de sinistres.

En premier lieu, notons que la variance de S se compose de deux éléments:

$$Var(S) = Var\left(E\left[S\middle|\Theta\right]\right) + E\left[Var\left(S\middle|\Theta\right)\right]$$

Le premier terme est le risque paramétrique et le second le risque aléatoire.
Pour le démontrer, nous transformons la partie de droite de cette équation afin de récupérer la partie de gauche:

$$\begin{aligned} Var(E[S|\Theta]) + E[Var(S|\Theta)] &= E[E^2(S|\Theta)] - E^2[E(S|\Theta)] + E[E(S^2|\Theta) - E^2(S|\Theta)] \\ &= E[E(S^2|\Theta)] - E^2[E(S|\Theta)] \\ &= E[S^2] - E^2[S] \\ &= Var(S) \end{aligned}$$

Si l'on reprend notre exemple de l'été, les termes de droite s'interprètent ainsi:

- L'espérance mathématique de *S* change suivant le type d'été (chaud, doux, frais). Le premier terme mesure la variance de ce changement. Il mesure donc l'incertitude qui affecte l'estimation de l'espérance mathématique, autrement dit le risque paramétrique.
- Le second terme est une moyenne des variances calculées pour chaque type d'été. Cela nous permet d'analyser les fluctuations de *S* autour de l'espérance mathématique (risque aléatoire).

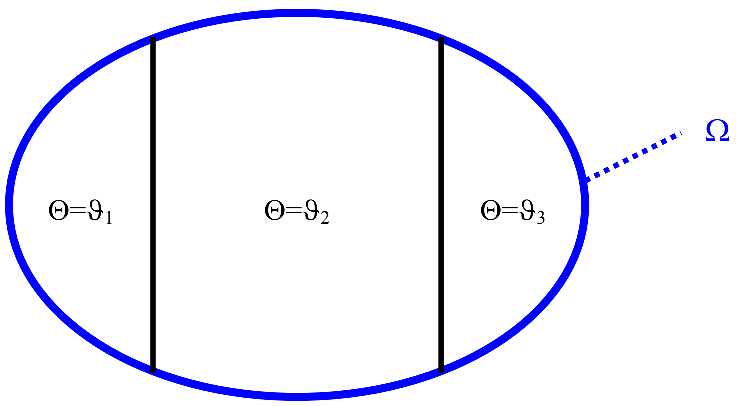


Figure: Représentation typique de l'espace de probabilité Ω pour les trois caractéristiques de risque Θ différentes (par exemple $\Theta = \vartheta_1$: «été chaud»; $\Theta = \vartheta_2$: «été doux»; $\Theta = \vartheta_3$: «été frais»). La distribution de *S* est différente pour chaque définition de Θ.

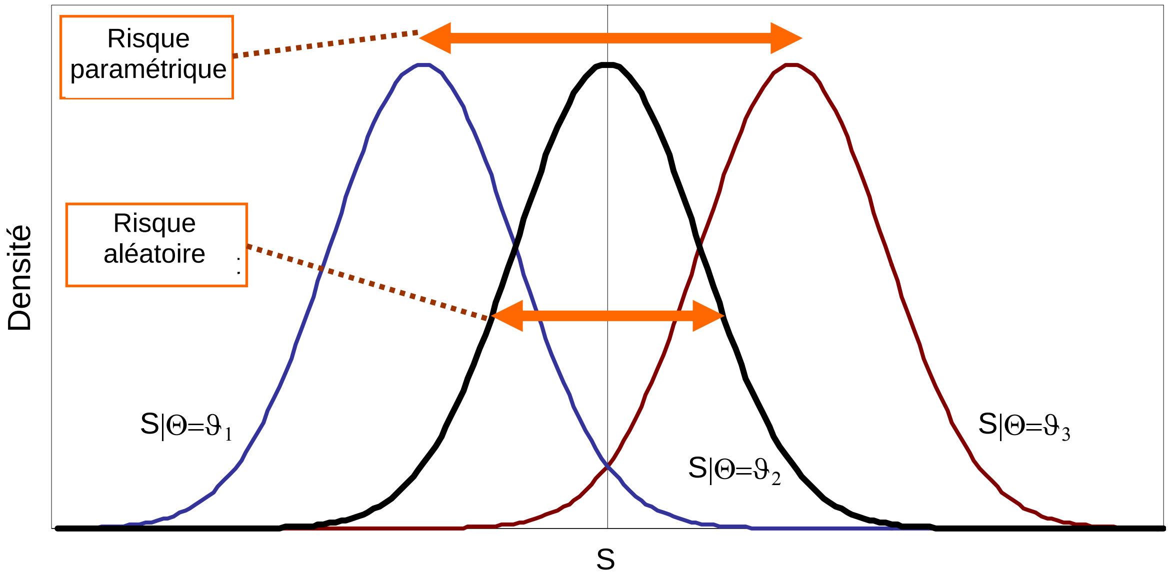


Figure: Représentation typique de la densité de *S* pour les trois états ϑ_1, ϑ_2 et ϑ_3. Le risque aléatoire est le risque donné par les fluctuations aléatoires autour de l'espérance mathématique. Le risque paramétrique résulte de l'incertitude qui affecte l'estimation de l'espérance mathématique.

8.4.5.2 Formule (26)

Considérons à présent S comme la charge des petits sinistres dans une branche d'assurance. S est la somme stochastique

$$S = \sum_{j}^{N} Y_j$$

des sinistres individuels Y_j. Pour simplifier la notation, nous renonçons à signaler la branche en indice et la caractérisation *PS* pour les petits sinistres. Au paragraphe précédent nous avons montré que la variance de S a deux composantes: le risque paramétrique et le risque aléatoire. Il en découle automatiquement, pour le coefficient de variation, que

$$CVar^2(S) = \frac{Var(S)}{E^2[S]} = \frac{Var(E[S|\Theta])}{E^2[S]} + \frac{E[Var(S|\Theta)]}{E^2[S]}.$$

Nous désignons par $CV_{p,i}^{\;2}$ le premier terme, c'est-à-dire le coefficient de variation de S pour le risque paramétrique. Il nous reste à définir le deuxième terme, soit le risque aléatoire.
Admettons que pour une caractéristique de risque donnée, le nombre de sinistres soit distribué selon la loi de Poisson

$$N|(\Theta = \vartheta) \sim Pois(\lambda(\vartheta))$$

et que les deux premiers moments du montant individuel des sinistres soient donnés par

$$E[Y_j|\Theta = \vartheta] = \mu_Y(\vartheta)$$

$$Var[Y_j|\Theta = \vartheta] = \sigma_Y^2(\vartheta)$$

L'hypothèse retenue d'une distribution de Poisson pour $N|(\Theta = \vartheta)$ implique

$$E[N|\Theta = \vartheta] = Var(N|\Theta = \vartheta) = \lambda(\vartheta)$$

Étant donné que $\Theta = \vartheta$ et que nous avons postulé l'indépendance de N et Y_j, la distribution de S est une distribution de Poisson composée. Sa variance est donnée par l'expression connue:

$$\begin{aligned} Var(S|\Theta = \vartheta) &= Var(Y_j|\Theta = \vartheta) \cdot E[N|\Theta = \vartheta] + E^2[Y_j|\Theta = \vartheta] \cdot Var(Y_j|\Theta = \vartheta) \\ &= \sigma_Y^2(\vartheta) \cdot \lambda(\vartheta) + \mu_Y^2(\vartheta) \cdot \lambda(\vartheta) \end{aligned}$$

Le passage à l'espérance mathématique par Θ donne

$$\begin{aligned} E[Var(S|\Theta)] &= E[\sigma_Y^2(\Theta) \cdot \lambda(\Theta) + \mu_Y^2(\Theta) \cdot \lambda(\Theta)] \\ &= \sigma_Y^2 \cdot \lambda + \mu_Y^2 \cdot \lambda \end{aligned}$$

où λ, μ_Y^2 et σ_Y^2 sont les espérances mathématiques de $E[\lambda(\Theta)]$, $E[\mu_Y^2(\Theta)]$ et $E[\sigma_Y^2(\Theta)]$.

Remarque: Lors du calcul de l'espérance mathématique de Θ, l'espérance mathématique d'un produit est remplacée par le produit des espérances mathématiques. Cela n'est exact que lorsque les deux facteurs $\sigma_Y^2(\Theta)$ et $\lambda(\Theta)$, ou $\mu_Y^2(\Theta)$ et $\lambda(\Theta)$, sont indépendants. Pour qu'une telle indépendance soit vraie, il faut que Θ agisse indépendamment sur $\mu_Y^2(\Theta)$ et $\sigma_Y^2(\Theta)$ d'une part et sur $\lambda(\Theta)$ d'autre part. Tel est le cas si nous admettons que Θ se décompose en deux parties indépendantes Θ_Y et Θ_N où Θ_Y n'influence que $\mu_Y^2(\Theta)$ et $\sigma_Y^2(\Theta)$, et Θ_N que $\lambda(\Theta)$.

Nous obtenons ainsi le coefficient de variation (dans l'optique du risque aléatoire)

$$\begin{aligned} CVar_Z^2(S) &= \frac{E[Var(S|\Theta)]}{E^2[S]} = \frac{\sigma_Y^2 \cdot \lambda + \mu_Y^2 \cdot \lambda}{\mu_Y^2 \cdot \lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{\sigma_Y^2}{\mu_Y^2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \left(CVar^2(Y_j) + 1 \right) \end{aligned}$$

soit le deuxième terme de la formule (26).

8.4.6 Coefficients de variation du risque paramétrique AP

Le tableau ci-dessous donne les coefficients de variation $CVar(C_{AP} \cdot R_{AP}^{(0)}) = CVar(C_{AP})$ des réserves, pour le risque paramétrique.

Branche	Coefficient de variation
RCvm	3,5%
Cvm	3,5%
Choses	3,0%
RC	4,5%
LAA	3,5%
Accidents sans LAA	3,0%
Maladie collective	3,0%
Maladie individuelle	5,0%
Transport	5,0%
Aviation	5,0%
Financement et cautionnement	5,0%
Autres	5,0%

Tableau: Coefficients de variation du montant individuel des sinistres

8.5 Risque de crédit

8.5.1 Table d'équivalence des notations de crédit

Agence	Notation de crédit					
Standard&Poor's	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-
Moody's	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3
Fitch IBCA	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-

Agence	Notation de crédit								
Standard&Poor's	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-
Moody's	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3
Fitch IBCA	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-

Agence	Notation de crédit					
Standard&Poor's	CCC+	CCC	CCC-	CC	C	D
Moody's	Caa1	Caa2	Caa3	Ca	C	
Fitch IBCA	CCC+	CCC	CCC-	CC	C	D

Source: Basel 2: Quantitative Impact Study 3: Instructions

8.6 Remarques sur quelques distributions de probabilités

8.6.1 Distribution normale

La distribution normale standard a la densité et la fonction de distribution cumulée

$$\varphi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right)$$

et

$$\Phi_{0,1}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{0,1}(x)dx$$

La densité et la fonction de distribution cumulée de la distribution normale, générale et univariée sont

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) = \frac{1}{\sigma}\varphi_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)$$

et

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx = \Phi_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)$$

pour une espérance mathématique μ et un écart-type σ.
Posons les variables aléatoires $X \sim N(\mu,\sigma)$ distribuées normalement. En règle générale, l'*expected shortfall* de X

$$ES_\alpha(X) = E[X \mid X \le VaR_\alpha(X)]$$

où $\alpha \in (0,1)$ est souvent un petit nombre qui tend vers 0, ne peut s'écrire sous une forme analytique. Pour une variable distribuée normalement, on peut toutefois l'obtenir directement par calcul.
Observons d'abord le cas particulier d'une distribution normale standard $Z \sim N(0,1)$. Le calcul de l'intégrale

$$ES_\alpha(Z) = \frac{1}{\alpha} \cdot \int_{-\infty}^{q_\alpha^{(0,1)}} y \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

débouche sur

$$ES_\alpha(Z) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \varphi_{0,1}(q_\alpha^{(0,1)})$$

Cela signifie que $q_\alpha^{(0,1)} = \Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)$ est le quantile α de la distribution normale standard. L'*expected shortfall* d'un grand $X \sim N(\mu,\sigma)$ est évidemment supérieure d'un facteur σ et glisse donc vers la droite de l'espérance mathématique μ. Nous obtenons ainsi

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \sigma \cdot \varphi_{0,1}(q_\alpha^{(0,1)}) + \mu$$

Soulignons qu'il s'agit là d'une fonction linéaire en μ et σ.

L'*expected shortfall* de X peut aussi être calculé directement à partir de l'intégrale

$$I_{\mu,\sigma}(y) = \int_{-\infty}^{y} x \cdot \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx = -\sigma^2 \cdot \varphi_{\mu,\sigma}(y) + \mu \cdot \Phi_{\mu,\sigma}(y)$$

A cette fin, nous posons $y = q_\alpha^{(\mu,\sigma)} = \Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(\alpha)$ et nous utilisons $\Phi_{\mu,\sigma}\left(\Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(\alpha)\right) = \alpha$. Nous aboutissons immédiatement au même résultat que précédemment:

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} I_{\mu,\sigma}(q_\alpha^{(\mu,\sigma)}) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \sigma^2 \cdot \varphi_{(\mu,\sigma)}(q_\alpha^{(\mu,\sigma)}) + \mu$$

En guise de simplification pour le calcul de la partie de droite, on peut utiliser $\varphi_{(\mu,\sigma)}(q_\alpha^{(\mu,\sigma)}) = \varphi_{(0,\sigma)}(q_\alpha^{(0,\sigma)})$. Il est intéressant de noter que dans cette approche, σ est au carré alors que précédemment il n'apparaissait qu'à la première puissance. Cela tient au fait que l'équation

$$\varphi_{(0,1)}(q_\alpha^{(0,1)}) = \sigma \cdot \varphi_{(\mu,\sigma)}(q_\alpha^{(\mu,\sigma)})$$

s'applique pour les fonctions de densité.

Une analyse dimensionnelle aboutit au même résultat:
Y n'a pas de dimension, ou plutôt a la dimension d'un nombre, donc 1. Il en va de même pour sa fonction de densité, son espérance mathématique et son écart-type.
X en revanche, n'est pas sans dimension. Sa dimension d est par exemple une longueur ou une monnaie, etc. L'espérance mathématique, l'écart-type et l'*expected shortfall* ont aussi la dimension d, tandis que la densité a la dimension d^{-1}. C'est pour cela que σ **doit** être à la puissance 1 dans la première équation et à la puissance 2 dans la seconde.

8.6.2 Distribution lognormale

La distribution d'une variable aléatoire Y est dite lognormale lorsque

$$\ln(Y/y_0) \sim N(\mu,\sigma)$$

c'est-à-dire lorsque le logarithme de Y normalisé par y_0 est une grandeur distribuée normalement. Mais il suffit parfois que

$$\ln(Y) \sim N(\mu,\sigma)$$

Cette définition est admissible lorsque Y est une valeur sans dimension, autrement dit est un nombre.

Admettons que y_0 soit une valeur positive. Le support de Y est alors le demi-axe positif. Nous avons ainsi, pour la distribution de densité et la fonction de distribution cumulée de Y, l'expression

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(y/y_0) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$F_Y(y) = \Phi_{\mu,\sigma}(\ln(y/y_0)),$$

où $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$ est la fonction de distribution cumulée de la distribution normale.

Notons que μ et σ ne désignent pas l'espérance mathématique et l'écart-type de Y. Les relations suivantes s'appliquent entre l'espérance mathématique et la variance d'une part, et le paramètres μ et σ d'autre part:

$$E[Y] = y_0 \cdot \exp(\mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2)$$
$$Var(Y) = {y_0}^2 \cdot \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) = E^2[Y] \cdot (\exp(\sigma^2) - 1)$$

et

$$\mu = \ln\left(\frac{E[Y]}{y_0}\right) - \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{Var(Y)}{E^2[Y]} + 1\right) = \ln\left(\frac{E[Y]}{y_0}\right) - \tfrac{1}{2}\sigma^2$$
$$\sigma^2 = \ln\left(\frac{Var(Y)}{E^2[Y]} + 1\right) \geq 0$$

Le quantile ainsi que la *value at risk* au niveau du quantile α sont

$$q_\alpha = y_0 \cdot \exp(\Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(\alpha)) = y_0 \cdot \exp(\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}_{0,1}(\alpha)),$$

avec $\Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(\alpha)$ comme fonction inverse de la fonction de distribution cumulée de la distribution normale. L'*expected shortfall* (dans la queue de droite de la distribution lognormale) est:

$$ES_\alpha(Y) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(1 - \Phi_{0,1}(\Phi^{-1}_{0,1}(\alpha) - \sigma)\right) \cdot E[Y].$$

Remarque quant à la dérivation: il faut calculer l'intégrale

$$I = \int_{q_\alpha}^{\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{y} \cdot \exp\left(-\frac{[\ln(y/y_0) - \mu]^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

Après la substitution $u = \ln(y/y_0)$ et l'élévation au carré, on obtient

$$I = y_0 \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \int_{\ln(q_\alpha/y_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{[u - (\mu + \sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right) du$$

Cette intégrale peut être considérée comme l'intégrale de la densité d'une grandeur distribuée normalement, dont la valeur est

$$\int_{\ln(q_\alpha/y_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{[u - (\mu + \sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right) du = 1 - \Phi_{0,1}\left(\frac{1}{\sigma}\left(\ln(q_\alpha/y_0) - (\mu + \sigma^2)\right)\right)$$

Avec l'expression susmentionnée pour le quantile, c'est-à-dire $q_\alpha = y_0 \cdot \exp(\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}_{0,1}(\alpha))$, on retrouve la formule donnée pour l'*expected shortfall*.

8.6.3 Distribution gamma

Nous considérons la distribution gamma à deux paramètres $Ga(\alpha,\beta)$ de densité

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\dfrac{x}{\beta}\right) & ,x > 0 \\ 0 & ,x \le 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ est la fonction gamma.

Le support d'une valeur gamma-distribuée est, comme dans une distribution normale, le demi-axe positif.

Les paramètres α et β sont des paramètres dits de forme ou d'échelle. En réalité, β n'a d'effet que sur l'unité d'échelle mais pas sur la «forme» de la distribution.

Soit $X \sim Ga(\alpha,\beta)$. On peut établir les relations suivantes entre les deux premiers moments et les deux paramètres:

$$\mu = E[X] = \alpha\beta$$
$$\sigma^2 = Var[X] = \alpha\beta^2$$

et

$$\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$$
$$\beta = \frac{\sigma^2}{\mu}$$

On peut en déduire immédiatement, comme l'on pouvait s'y attendre, que le coefficient de variation

$$CVar(X) = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

ne dépend pas du paramètre d'échelle.

Soit $F_{\alpha,\beta}(x)$ la fonction de distribution cumulée de la variable X. On peut aisément développer l'*expected shortfall* (dans la queue de droite, soit γ tendant vers 1) comme suit:

$$ES_{\gamma}(X) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \int_{q_{\gamma}}^{\infty} x f_{\alpha,\beta}(x) dx = \alpha\beta \cdot \frac{1-F_{\alpha+1,\beta}(q_{\gamma})}{1-F_{\alpha,\beta}(q_{\gamma})}$$

q_{γ} désignant le quantile γ.

8.6.4 Comparaison de distributions normale, lognormale et gamma

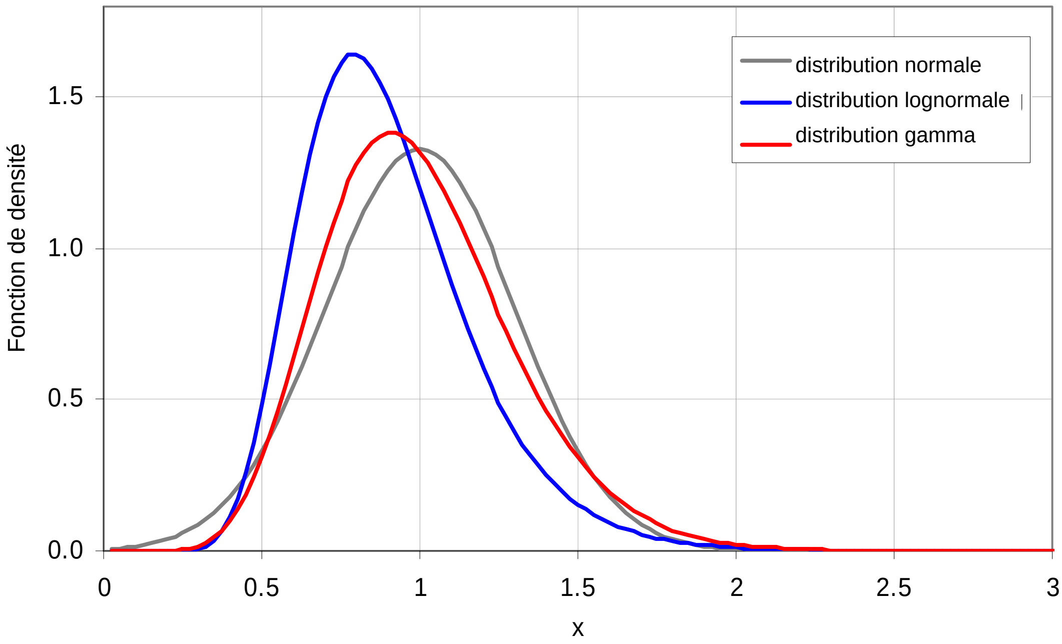


Figure 13: Fonction de densité des distributions normale, lognormale et gamma pour une espérance mathématique de 1 et un écart-type de 0,3.

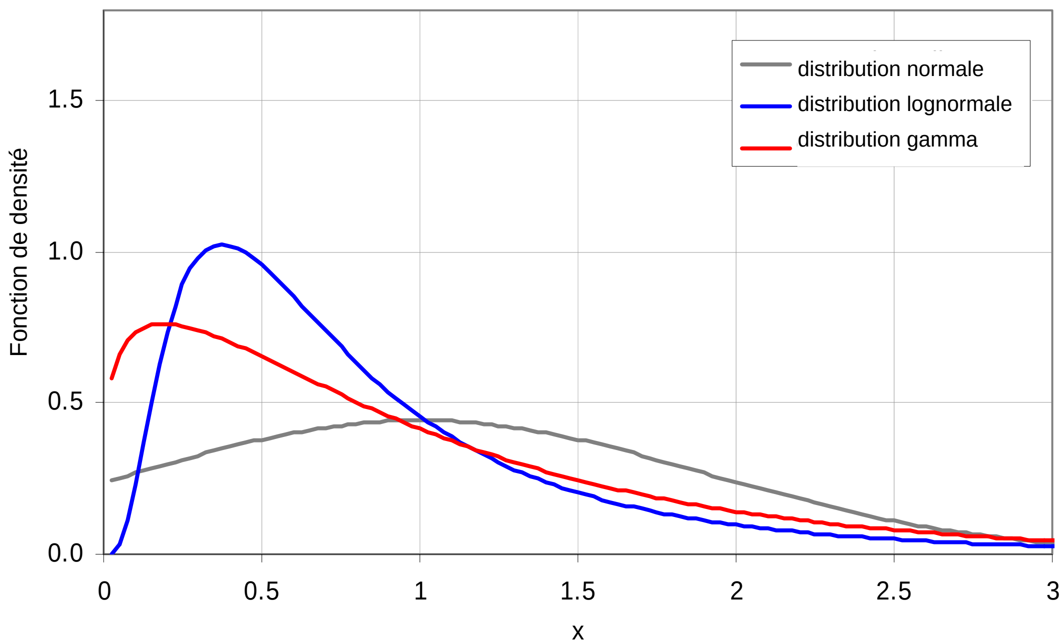


Figure 14: Fonction de densité des distributions normale, lognormale et gamma pour une espérance mathématique de 1 et un écart-type de 0,9.

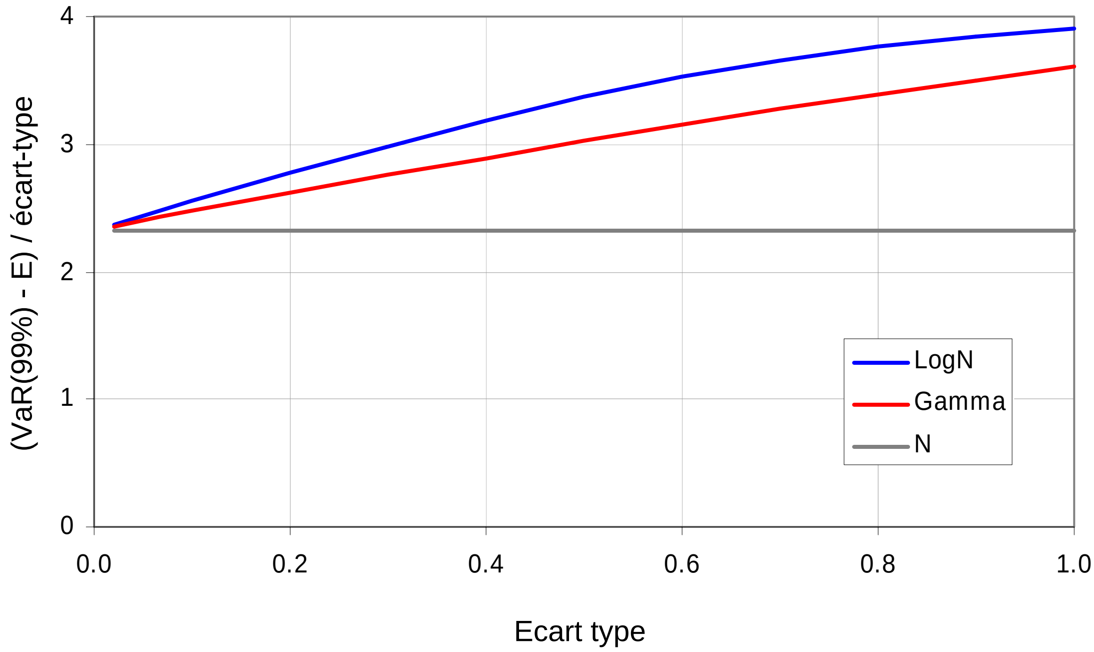


Figure 15: ***Value at risk*** **(99%) des distributions normale, lognormale et gamma comme fonction de l'écart-type. Ce graphique illustre la différence entre la** ***value at risk*** **et l'espérance mathématique, comme multiple de l'écart-type. Pour la distribution normale, on obtient une valeur constante égale à 2,326.**

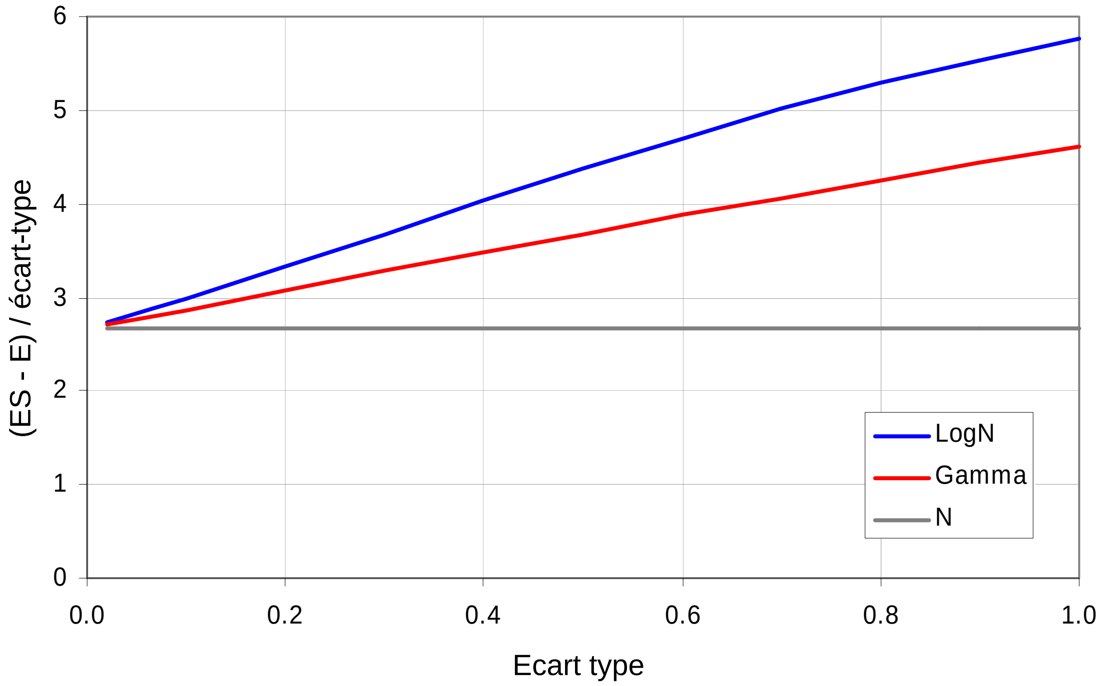


Figure 16: ***Expected shortfall*** **(99%) des distributions normale, lognormale et gamma comme fonction de l'écart-type. Ce graphique illustre la différence entre l'*expected shortfall* et l'espérance mathématique comme multiple de l'écart-type. Pour la distribution normale, on obtient une valeur constante égale à 2,665.**

8.6.5 Distribution de Pareto

Nous considérons la distribution de Pareto dont la fonction de distribution cumulée est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < \beta \\ 1-(x/\beta)^{-\alpha} & x \geq \beta \end{cases}$$

et la fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < \beta \\ \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot (x/\beta)^{-\alpha-1} & x \geq \beta \end{cases}$$

avec le paramètre d'échelle β et le paramètre de forme α.

Il existe l'espérance mathématique $\alpha > 1$ et la variance d'une grandeur X distribuée selon la loi de Pareto pour $\alpha > 2$. Il s'agit de

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot \beta$$

et de

$$Var(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \cdot \beta^2 .$$

La *value at risk*, soit le quantile au niveau de quantile l, est

$$VaR_l(X) = q_l = (1-l)^{(-1/\alpha)} \cdot \beta$$

L'*expected shortfall* au niveau de quantile l pour $\alpha > 1$ est

$$\begin{aligned} ES_l(X) &= \frac{1}{1-l} \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1} \beta^{\alpha} q_l^{-\alpha+1} \\ &= \frac{1}{1-l} \cdot E[X] \cdot \left(\frac{\beta}{q_l} \right)^{\alpha-1} \\ &= \frac{1}{(1-l)^{1/\alpha}} \cdot E[X] \\ &= \frac{1}{(1-l)^{1/\alpha}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \beta \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot q_l \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot VaR_l(X) \end{aligned}$$

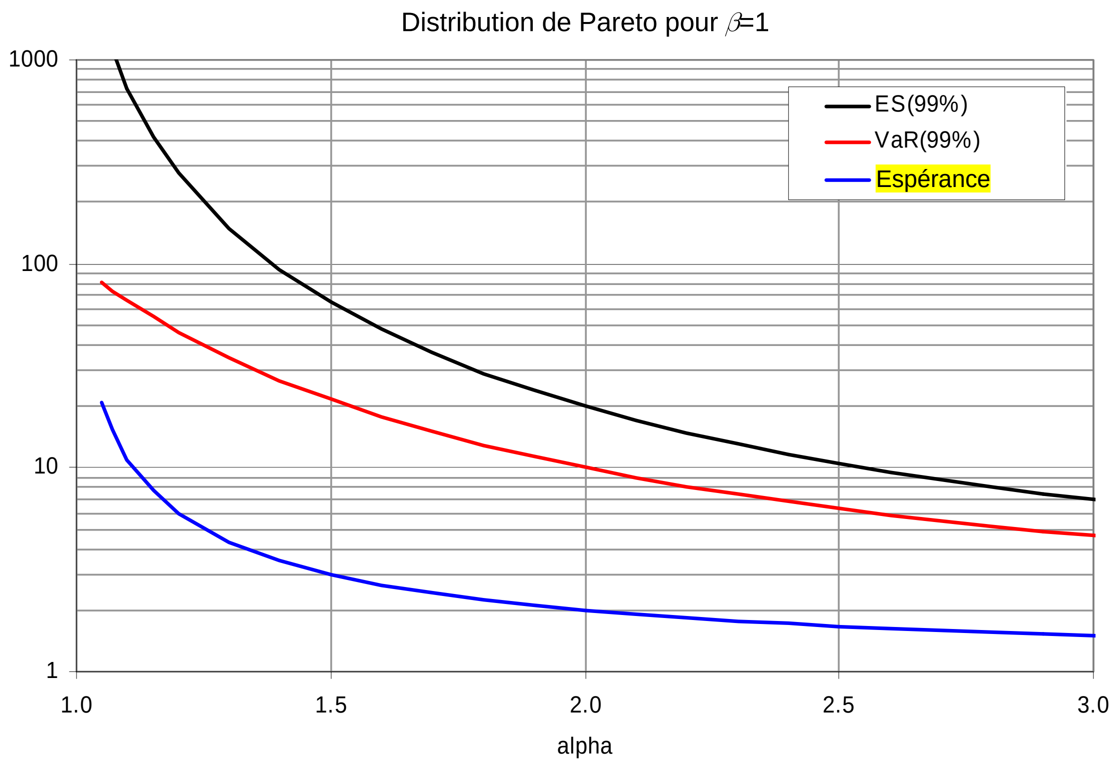


Figure 17: Espérance mathématique, *value at risk* (99%) et *expected shortfall* (99%) d'une distribution de Pareto pour $\beta = 1$. Plus la valeur α est petite, plus les valeurs de la *value at risk* et de l'*expected shortfall* augmentent, en raison de l'alourdissement progressive de la queue.

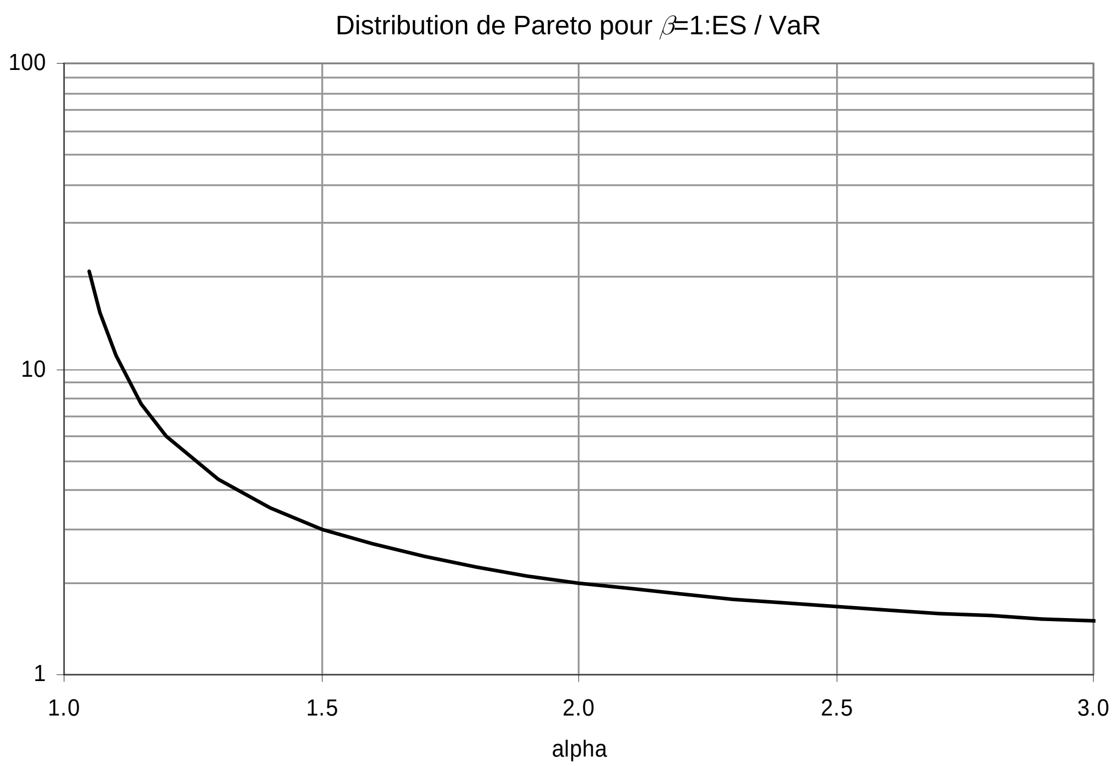


Figure 18: Rapport de l'*expected shortfall* (99%) à la *value at risk* (99%) dans une distribution de Pareto, en fonction du paramètre de Pareto α. Pour les petits α, l'*expected shortfall* est sensiblement plus élevé que la *value at risk*.

8.6.6 Distribution de Pareto tronquée

Nous considérons une distribution de Pareto tronquée en $x = \gamma$, dont la fonction de distribution cumulée est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < \beta \\ 1-(x/\beta)^{-\alpha} & \beta \le x \le \gamma \\ 1 & \gamma < x \end{cases}$$

et la fonction de densité

$$f(x) = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{-\alpha} \cdot \delta(x-\gamma) + \begin{cases} 0 & x < \beta \\ \dfrac{\alpha}{\beta}(x/\beta)^{-\alpha-1} & \beta \le x < \gamma \\ 0 & \gamma \le x \end{cases}$$

et où $\delta(x-\gamma)$ est la distribution de Dirac d'une variable de grandeur 1 en γ. $f(x)$ a un atome de la masse $(\gamma/\beta)^{-\alpha}$ en γ. Cela provient du fait que les mesures de probabilité qui se situent au-dessus de la limite d'inclusion dans la distribution de Pareto normale, se concentrent en γ dans la distribution tronquée.
Pour l'espérance mathématique, on obtient ainsi

$$E[X] = \begin{cases} \left(\ln(\gamma/\beta)+1\right) \cdot \beta & \alpha = 1 \\ \dfrac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \beta \cdot \left(1-\dfrac{1}{\alpha}\left\{\dfrac{\beta}{\gamma}\right\}^{\alpha-1}\right) & \alpha \ne 1 \end{cases}$$

Considérons le cas $\alpha > 1$. L'espérance mathématique de la distribution de Pareto non tronquée est $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \beta$ (ch. 8.6.5). Le facteur $1-\dfrac{1}{\alpha}\left\{\dfrac{\beta}{\gamma}\right\}^{\alpha-1}$ représente donc le rapport des espérances mathématiques de la distribution tronquée à celles de la distribution non tronquée.

8.7 Interlocuteurs

René Schnieper	rene.schnieper@bpv.admin.ch	++41 31 323 53 24
Thomas Luder	thomas.luder@bpv.admin.ch	++41 31 325 01 68
Mark Stober	mark.stober@bpv.admin.ch	++41 31 323 54 19

Web http://www.bpv.admin.ch/themen/00506

Office fédéral des assurances privées OFAP
Schwanengasse 2
CH - 3001 Berne