Eidgenössische Finanzmarktaufsicht FINMA
Autorité fédérale de surveillance des marchés financiers FINMA
Autorità federale di vigilanza sui mercati finanziari FINMA
Swiss Financial Market Supervisory Authority FINMA

# Méthode Delta-Gamma comme modèle standard pour les assureurs vie

## 1 Introduction

Dans le cadre du test suisse de solvabilité (SST), le modèle standard de quantification des risques repose jusqu'alors, par souci de simplification, sur une approche variance-covariance. Cette dernière admet deux hypothèses, à savoir:

- les variations des facteurs de risque suivent une loi normale et
- la relation entre les variations du capital porteur de risque (CPR) et les variations des facteurs de risque est linéaire :

  Par exemple, si une hausse des taux d'intérêts de 50 points de base conduit à une augmentation du CPR de CHF 38 mios, alors une hausse de 100 points de base conduit à une augmentation du CPR de CHF 76 mios.

L'approche variance-covariance présente l'avantage que certaines mesures de risque comme la valeur à risque (Value-at-Risk ; VaR) ou la mesure dite de l'Expected Shortfall peuvent être déterminées analytiquement. C'est cette dernière qui est utilisée dans le calcul du capital cible.

L'approche variance-covariance, connue aussi sous le nom « approche Delta-normale », est implémentée dans le classeur Excel « Template Excel SST avec Liste des données fondamentales » et est encore utilisée par un grand nombre de compagnies d'assurances.

D'un point de vue mathématique, l'hypothèse de linéarité n'est rien d'autre que l'approximation de premier ordre du développement de Taylor du CPR en tant que fonction des facteurs de risque. Si elle se justifie pour un portefeuille d'actions, l'approximation linéaire n'est en revanche plus appropriée pour une portefeuille d'actifs contenant des dérivés ou des instruments dépendants de taux d'intérêt ou pour des engagements issus de contrats d'assurance ayant des options et garanties. Une méthode simple pour tenir compte des effets de non-linéarité consiste à considérer le terme quadratique de l'approximation de Taylor. Cette approche est communément appelée méthode Delta-Gamma et se définit de la manière suivante:

(1) $$\Delta\text{RBC} \approx \delta^T \Delta Z + \frac{1}{2} \Delta Z^T \Gamma \, \Delta Z \,,$$

où

Einsteinstrasse 2, 3003 Berne
Tél. +41 (0)31 327 91 00, Fax +41 (0)31 327 91 01
**www.finma.ch**

$$\delta_i = \frac{\partial \mathrm{RBC}}{\partial z_i}, \qquad \Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 \mathrm{RBC}}{\partial z_i \partial z_j}$$

dénotent les dérivées premières et secondes du CPR par rapport aux facteurs de risque et ΔRBC dénote la variation du capital porteur de risque entre $t = 1$ et $t = 0$ (jour de référence pour le SST). De manière analogue, le vecteur $\Delta Z$ dénote les variations des facteurs de risque sur la période de projection, soit $\Delta Z = Z(1) - Z(0)$, avec $Z(t) = (Z_1(t), \cdots, Z_d(t))^T$ où $d$ désigne le nombre de facteurs de risque.

## 2 Décision de la FINMA

La FINMA a décidé de baser le modèle standard pour la quantification des risques des assureurs vie sur la méthode Delta-Gamma. Ainsi, les effets de non-linéarité seront mieux pris en compte dans le calcul du capital cible.

## 3 Implémentation

Comparée à une méthode Delta-normale simple, l'implémentation d'une méthode Delta-Gamma requiert les éléments additionnels suivants:

- Calcul de la matrice Γ, i. e. des dérivées partielles du CPR par rapport aux *i*-ème et *j*-ème facteurs de risque, et notamment des dérivées partielles mixtes ($i \neq j$; termes dénommés „cross-gamma“);
- Détermination de la distribution de probabilité de ΔRBC [1].

### 3.1 Détermination des sensibilités

Une méthode Delta-Gamma requiert d'estimer les dérivées partielles secondes, en sus des sensibilités ou des variations des facteurs de risque vers le haut ou vers le bas. Pour ce faire, il convient de procéder aussi à des calculs de sensibilités, tels qu'expliqués en l'annexe A. Tous les facteurs de risque sont à prendre en compte, en particulier ceux liés aux risques biométiques, pour que la méthode Delta-Gamma soit fructueuse.

Lorsqu'un élément de la matrice Γ est négligé, il incombe à la compagnie d'apporter les justifications. Un facteur de risque *i* ne peut être ignoré s'il contribue à un effet diagonal-Gamma, ce qui est le cas si $s_i^+ + s_i^- \neq 0$ (notation cf. annexe A). Lors des calculs des compléments au capital cible effectués par la

[1] Contrairement à la méthode Delta-normale , $\Delta\mathrm{RBC}$ n'est plus normale univariée, car au vu du terme $\Delta Z^T \Gamma \, \Delta Z$ il faut rappeler qu'une forme quadratique de vecteurs normaux *n'est pas* distribuée selon une loi normale.

FINMA pour les SST 2008 et 2009, les termes mixtes avaient été ignorés pour la raison qu'ils ne pouvaient être déduits directement des sensibiliés rapportées dans le chablon (template) SST.

## 3.2 Distribution de probabilité des variations du CPR

Une fois connue la matrice Γ des sensibilités, il y a plusieurs manières d'implémenter une méthode Delta-Gamma. Sous l'hypothèse que les facteurs de risques suivent une loi normale multivariée, la distribution de probabilité de (1) peut par exemple être déduite par inversion numérique des fonction caractéristique ou fonction génératice des moments (cf. p. ex. Glasserman [2] p. 487). Une voie alternative consiste en la simulation (Delta-Gamma Monte Carlo), qui présente l'avantage de ne pas requérir d'hypotèse de normalité et est peut-être plus facile à implémenter.

Le nouveau modèle standard SST pour les risques d'assurance vie part de l'hypothèse, comme jusqu'alors, que les variations des facteurs de risques sont normales multivariées. La plupart des softwares pour la statistique offrent la possibilité de simuler des vecteurs normaux multivariés à partir d'une espérance et d'une matrice de covariances données (pour plus de détails, cf. p. ex. McNeil et. al. [4], p. 66). Il s'ensuit que la distribution de la variation du CPR (1) peut être estimée par la distribution empirique résultant des vecteurs ΔZ simulés en nombre suffisant.

## 3.3 Détermination de l' Expected Shortfall

Un estimateur non paramétrique simple de l'Expected Shortfall peut être obtenu par simulation. Il s'agit de la moyenne des variations du CPR simulées qui dépassent la Value-at-Risk correspondante:

$$-\widehat{\mathrm{ES}}_\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{m} \Delta\mathrm{RBC}_j \, 1_{\{\Delta\mathrm{RBC}_j < \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha\}}}{\sum_{j=1}^{m} 1_{\{\Delta\mathrm{RBC}_j < \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha\}}}$$

où $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha$ est un estimateur (pour un quantile) de la Value-at-Risk au niveau de confiance $\alpha$ ($\alpha = 0.01$) et $\Delta\mathrm{RBC}_j$ la variation du CPR obtenue à la $j$-ème simulation ($j = 1, \ldots, m$). $1_A$ dénote la fonction indicatrice: $1_A = 1$ si l'événement $A$ a lieu, $0$ sinon.

Vu que la Value-at-Risk est petite, on est confronté à une situation de „rare event“ lors de la simulation. Dans la pratique, un nombre de simulations de l'ordre de 500‘000 devrait permettre d'atteindre un résultat stable. Selon les circonstances, une technique de réduction de la variance doit également être prise en compte (cf. p. ex. Asmussen [1], p. 432 ou Glasserman et. al. [3]).

## 4 Conclusions

Le modèle standard pour la quantification des risques pour les assureurs vie est nouvellement basé sur la méthode Delta-Gamma. Cette note technique présente aussi sa mis en œuvre. Afin de valider les résultats, il est utile de déterminer des variables de contrôle. Par exemple, il est opportun de comparer la valeur de l'Expected Shortfall calculée de manière analytique avec celle estimée à partir des simulations et basée sur l'approche Delta-normale. Au demeurant, cette comparaison doit faire partie du rapport SST.

Il est aussi à noter que la méthode Delta-Gamma a ses limites. En particulier, l'existence d'options et de garanties peut rendre la méthode Delta-Gamma caduque par le fait que la relation entre les variations du capital porteur de risque et des facteurs de risque ne soit pas différentiable jusqu'au deuxième ordre. Si ces effets devaient se révéler considérables, une approche stochastique devrait être adoptée, avec éventuellement une compression du portefeuille. La méthode utilisée doit être mentionnée dans le rapport SST.

## 5 Références

[1] Asmussen, S. (2007). *Stochastic Simulation*. Springer.

[2] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.

[3] Glasserman, P., Heidelberger, P., and Shahabuddin, P. (2000). *Variance Reduction Techniques for Estimating Value-at-Risk*. Management Science, Vol. 46, No. 10.

[4] Mc Neil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.

## Annexe A: Sensibilités pour une méthode Delta-Gamma

| Sensibilité/ Dérivée | Estimateur | Commentaire |
|---|---|---|
| $\delta_i = \frac{\partial \mathrm{RBC}}{\partial z_i}$ | $\frac{\mathrm{RBC}(\dots, z_i + h_i, \dots) - \mathrm{RBC}(\dots, z_i - h_i, \dots)}{2h_i} = \frac{s_i^+ - s_i^-}{2h_i}$ | Sensibilités / variations vers le haut et vers le bas [similaire à la méthode Delta-normale] |
| $\Gamma_{ii} = \frac{\partial^2 \mathrm{RBC}}{\partial z_i^2}$ | $\frac{\mathrm{RBC}(\dots, z_i + h_i, \dots) - \mathrm{RBC}(\dots, z_i, \dots)}{h_i^2} + \frac{\mathrm{RBC}(\dots, z_i - h_i, \dots) - \mathrm{RBC}(\dots, z_i, \dots)}{h_i^2} = \frac{s_i^+ + s_i^-}{h_i^2}$ | éléments diagonaux de la matrice $\Gamma$ |
| $\Gamma_{ik} = \frac{\partial^2 \mathrm{RBC}}{\partial z_i \partial z_k}$ $(i \neq k)$ | $\frac{\mathrm{RBC}(\dots, z_i + h_i, \dots, z_k + h_k, \dots) - \mathrm{RBC}(\dots, z_i + h_i, \dots, z_k - h_k, \dots)}{4h_i h_k} + \frac{\mathrm{RBC}(\dots, z_i - h_i, \dots, z_k - h_k, \dots) - \mathrm{RBC}(\dots, z_i - h_i, \dots, z_k + h_k, \dots)}{4h_i h_k}$ | éléments mixtes (Cross-Gamma) de la matrice $\Gamma$ |

De manière générale: $s^+ \stackrel{\text{def}}{=} f(x+h) - f(x) \approx hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x)$ ; $s^- \stackrel{\text{def}}{=} f(x-h) - f(x) \approx -hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x)$

Il s'ensuit: $\frac{s^+ - s^-}{2h} \approx f'(x)$, $\frac{s^+ + s^-}{h^2} \approx f''(x)$.