

# Delta-Gamma Verfahren als Standard-Risikomodell für Lebensversicherer

## 1 Einleitung

Im Rahmen des SST wird gemeinhin und vereinfachend angenommen, dass der Zusammenhang zwischen der Veränderung des risikotragenden Kapitals (RTK) und der Risikofaktoränderungen linear ist: Bedeutete z.B. ein Zinsanstieg um 50 bps eine Zunahme des RTK um CHF 38 m, so hätte ein Zinsanstieg um 100 bps in diesem Fall eine Zunahme von CHF 76 m zur Folge. Für Modellierungszwecke wird darüber hinaus häufig angenommen, dass die Veränderungen der Risikofaktoren einer mehrdimensionalen Normalverteilung genügen. Zusammen mit der Linearitätsannahme erlaubt dies eine analytische Berechnung der Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall; letzteres dient als Basis für die Bestimmung des Zielkapitals (ZK) im Rahmen des SST. Allgemein ist ein solcher Ansatz unter dem Namen „Delta-Normal“ bekannt. Die Umsetzung des Delta-Normal Ansatzes in einer MS-Excel Datei wird dabei oft als „SST Standardmodell“ bezeichnet und noch immer von vielen Versicherungsgesellschaften angewendet, die über kein vollständig internes Modell verfügen.

Mathematisch gesprochen ist die Linearitätsannahme nichts anderes als die Taylor-Approximation 1. Ordnung, welche näherungsweise den funktionalen Zusammenhang zwischen dem RTK und den Risikofaktoren beschreibt. Für ein reines Aktienportfolio beispielsweise ist die Annahme eines linearen Zusammenhanges zwischen den Wertveränderungen des Portfolios und den Risikofaktoren korrekt. Hingegen ist der erwähnte lineare Zusammenhang für ein Portfolio nicht mehr gegeben, das Derivate oder zinsabhängige (Anlage-) Instrumente enthält. Ebenso wenig für versicherungstechnische Verpflichtungen, die (Zins-) Garantien oder Wahlmöglichkeiten wie vorzeitigen Rückkauf enthalten. Eine einfache Methode, um erwähnte Nicht-Linearitäten besser abzubilden, ist die zusätzliche Berücksichtigung des Approximationsterms 2. Ordnung (quadratischer Term). Durch Hinzunehmen des quadratischen Terms wird das so genannte Delta-Gamma Verfahren definiert:

$$(1) \quad \Delta RBC \approx \delta^T \Delta Z + \frac{1}{2} \Delta Z^T \Gamma \Delta Z,$$

wobei

$$\delta_i = \frac{\partial RBC}{\partial z_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 RBC}{\partial z_i \partial z_j}$$

die ersten und zweiten Ableitungen des RTK nach den Risikofaktoren bezeichnen und  $\Delta RBC$  die Veränderung des RTK zwischen den Zeitpunkten  $t = 1$  und  $t = 0$  (Stichtag der SST-Erhebung). Analog

bezeichnet  $\Delta Z$  den Vektor der Risikofaktoränderungen über den betrachteten Zeithorizont, also  $\Delta Z = Z(1) - Z(0)$  mit  $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_d(t))^T$  und  $d$  gleich der Anzahl Risikofaktoren.

## 2 Entscheid FINMA

Die FINMA hat entschieden, das Delta-Gamma Verfahren als Standard-Risikomodell für Lebensversicherungsgesellschaften zu definieren. Damit wird erreicht, dass die Nichtlinearitäten besser berücksichtigt werden.

## 3 Umsetzung

Bei der praktischen Umsetzung eines Delta-Gamma Verfahrens ergibt sich – verglichen mit der Delta-Normal Methode – folgender zusätzliche Aufwand:

- Ermittlung der Matrix  $\Gamma$ , also der partiellen Ableitungen des RTK nach dem  $i$ -ten und  $j$ -ten Risikofaktor. Insbesondere die Bestimmung der gemischten Ableitungen ( $i \neq j$ ; so genannte Kreuz- oder „cross-gamma“-Terme);
- Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\Delta RBC$ <sup>1</sup>.

### 3.1 Ermittlung der Sensitivitäten

Für ein Delta-Gamma Verfahren müssen – zusätzlich zu den Sensitivitäten oder Risikofaktorauslenkungen nach oben und unten – die zweiten Ableitungen des RTK nach den Risikofaktoren geschätzt werden. Dies geschieht wiederum mit Hilfe von Sensitivitätsberechnungen. Die Tabelle in Anhang A zeigt, welche Sensitivitätsberechnungen durchgeführt werden müssen. Für ein sinnvolles Delta-Gamma Verfahren sind alle Risikofaktoren einzubeziehen, insbesondere also auch die biometrischen.

Es ist die Aufgabe der Versicherungsunternehmung nachzuweisen, welche Elemente der Matrix  $\Gamma$  allenfalls verschwinden. Ist für einen Risikofaktor die Summe  $s_i^+ + s_i^- \neq 0$  (siehe Anhang), so liegt ein Diagonal-Gamma Beitrag vor. Insofern ist es nicht gerechtfertigt, diesen zu ignorieren. Das bei den Zuschlägen 2009 und 2010 von der FINMA angewendete Diagonal-Delta-Gamma-Verfahren berücksichtigt die Kreuzterme nicht, was eine Vereinfachung darstellt. Sie lässt sich dadurch rechtfertigen, dass damit lediglich auf die im Template von den Versicherungsunternehmen gelieferten Delta-Sensitivitäten abgestellt werden kann.

---

<sup>1</sup> Im Unterschied zum Delta-Normal Ansatz ist  $\Delta RBC$  nicht mehr univariat normalverteilt, da  $\Delta Z^T \Gamma \Delta Z$  als quadratische Form normalverteilter Zufallsvektoren *nicht mehr* normalverteilt ist.

### 3.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung der Änderung des RTK

Ist die Matrix  $\Gamma$  der Sensitivitäten bekannt, kann ein Delta-Gamma Verfahren auf verschiedene Arten implementiert werden. Unter der Annahme, dass die Risikofaktoren weiterhin multivariat normalverteilt sind, kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung in (1) zum Beispiel via numerische Inversion der charakteristischen oder momenterzeugenden Funktion ermittelt werden, siehe z.B. Glasserman [2] S. 487. Alternativ und einfacher zu implementieren ist ein simulationsbasierter Ansatz (Delta-Gamma Monte Carlo). Ein simulationsbasierter Ansatz hat zudem den Vorteil, dass er nicht auf normalverteilte Risikofaktoren eingeschränkt werden muss.

Für das neue SST-Standardrisikomodell Leben wird unverändert die Annahme getroffen, dass die Änderungen der Risikofaktoren multivariat normalverteilt sind. Die meisten statistischen Softwarepakete erlauben eine routinemässige Erzeugung (Simulation) normalverteilter Zufallsvektoren mit dem Mittelwertvektor und der Kovarianz-Matrix als Eingabegrössen. Hintergrundinformationen dazu findet man zum Beispiel in McNeil et. al. [4], Seite 66. Die empirische Verteilung des RTK gemäss (1) ergibt sich dann durch eine beliebig hohe Anzahl Simulationen des Vektors  $\Delta Z$ .

### 3.3 Ermittlung des Risikomasses Expected Shortfall

Ein einfacher nicht-parametrischer Schätzer des Expected Shortfalls in einem simulationsbasierten Ansatz ist der Durchschnitt sämtlicher Veränderungen des RTK, die den entsprechenden Value-at-Risk Schätzer unterschreiten:

$$-\widehat{ES}_\alpha = \frac{\sum_{j=1}^m \Delta RBC_j \mathbf{1}_{\{\Delta RBC_j < \widehat{VaR}_\alpha\}}}{\sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{\Delta RBC_j < \widehat{VaR}_\alpha\}}}$$

wobei  $\widehat{VaR}_\alpha$  den Schätzer des Value-at-Risk zum Konfidenzniveau  $\alpha$  bezeichnet ( $\alpha = 0.01$ ; Quantilschätzer) und  $\Delta RBC_j$  die simulierte Veränderung des RTK im  $j$ -ten Simulationsdurchgang ( $j = 1, \dots, m$ ). Die Grösse  $\mathbf{1}_A$  bezeichnet die Indikatorfunktion, also  $\mathbf{1}_A = 1$ , falls das Ereignis  $A$  eintritt und 0 sonst.

Da der Value-at-Risk klein ist, hat man es mit einem „rare event“ Simulationsproblem zu tun. Erfahrungen haben gezeigt, dass die Anzahl Simulationen in der Grössenordnung von 500'000 liegen sollte, um hinreichend stabile Resultate zu erhalten. Unter Umständen muss aber auch eine entsprechende Varianz minimierende Technik angewendet werden, siehe z.B. Asmussen [1], S. 432 oder Glasserman et. al. [3].

## 4 Schlussbemerkungen

In dieser Technischen Notiz wird das Standard-Risikomodell für Lebensversicherungen als Delta-Gamma Verfahren definiert. Zusätzlich wird dargelegt, wie dieses umgesetzt werden kann. Für Validierungszwecke sehr nützlich ist die Bestimmung von so genannten Kontrollvariaten. Zum Beispiel der

Vergleich des analytisch bestimmten Expected Shortfalls (im Delta-Normal Modell) mit der entsprechenden Schätzung aus der Simulation. Dieser Vergleich sollte im SST-Bericht ausgewiesen werden.

Es gilt zu beachten, dass der Anwendbarkeit des Delta-Gamma Verfahrens Grenzen gesetzt sind. Insbesondere mit Blick auf das Vorhandensein von Optionen und Garantien ist die Differenzierbarkeit bis zur 2. Ordnung gegebenenfalls nicht gewährleistet. Sind diese Effekte erheblich, muss voll stochastisch simuliert werden, eventuell durch Verdichtungen des Portefeuilles. Die Methodik hierzu ist im SST-Bericht aufzuzeigen.

## 5 Literatur

[1] Asmussen, S. (2007). *Stochastic Simulation*. Springer.

[2] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.

[3] Glasserman, P., Heidelberger, P., and Shahabuddin, P. (2000). *Variance Reduction Techniques for Estimating Value-at-Risk*. Management Science, Vol. 46, No. 10.

[4] Mc Neil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.

## Anhang A: Sensitivitäten für ein Delta-Gamma Verfahren

Sensitivität / Ableitung	Geschätzt durch	Kommentar
$\delta_i = \frac{\partial \text{RBC}}{\partial z_i}$	$\frac{\text{RBC}(\dots, z_i + h_i, \dots) - \text{RBC}(\dots, z_i - h_i, \dots)}{2h_i}$ $= \frac{s_i^+ - s_i^-}{2h_i}$	Sensitivitäten / Auslenkungen nach oben und unten [analog Delta-Normal Ansatz]
$\Gamma_{ii} = \frac{\partial^2 \text{RBC}}{\partial z_i^2}$	$\frac{\text{RBC}(\dots, z_i + h_i, \dots) - \text{RBC}(\dots, z_i, \dots)}{h_i^2}$ $+ \frac{\text{RBC}(\dots, z_i - h_i, \dots) - \text{RBC}(\dots, z_i, \dots)}{h_i^2}$ $= \frac{s_i^+ + s_i^-}{h_i^2}$	Diagonalelemente der Matrix $\Gamma$
$\Gamma_{ik} = \frac{\partial^2 \text{RBC}}{\partial z_i \partial z_k}$ $(i \neq k)$	$\frac{\text{RBC}(\dots, z_i + h_i, \dots, z_k + h_k, \dots) - \text{RBC}(\dots, z_i + h_i, \dots, z_k - h_k, \dots)}{4h_i h_k}$ $+ \frac{\text{RBC}(\dots, z_i - h_i, \dots, z_k - h_k, \dots) - \text{RBC}(\dots, z_i - h_i, \dots, z_k + h_k, \dots)}{4h_i h_k}$	Kreuzterme (Cross-Gamma) der Matrix $\Gamma$

Allgemein:  $s^+ \stackrel{\text{def}}{=} f(x+h) - f(x) \approx hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x)$  ;

$s^- \stackrel{\text{def}}{=} f(x-h) - f(x) \approx -hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x)$

Daraus folgt:  $\frac{s^+ - s^-}{2h} \approx f'(x)$ ,  $\frac{s^+ + s^-}{h^2} \approx f''(x)$ .